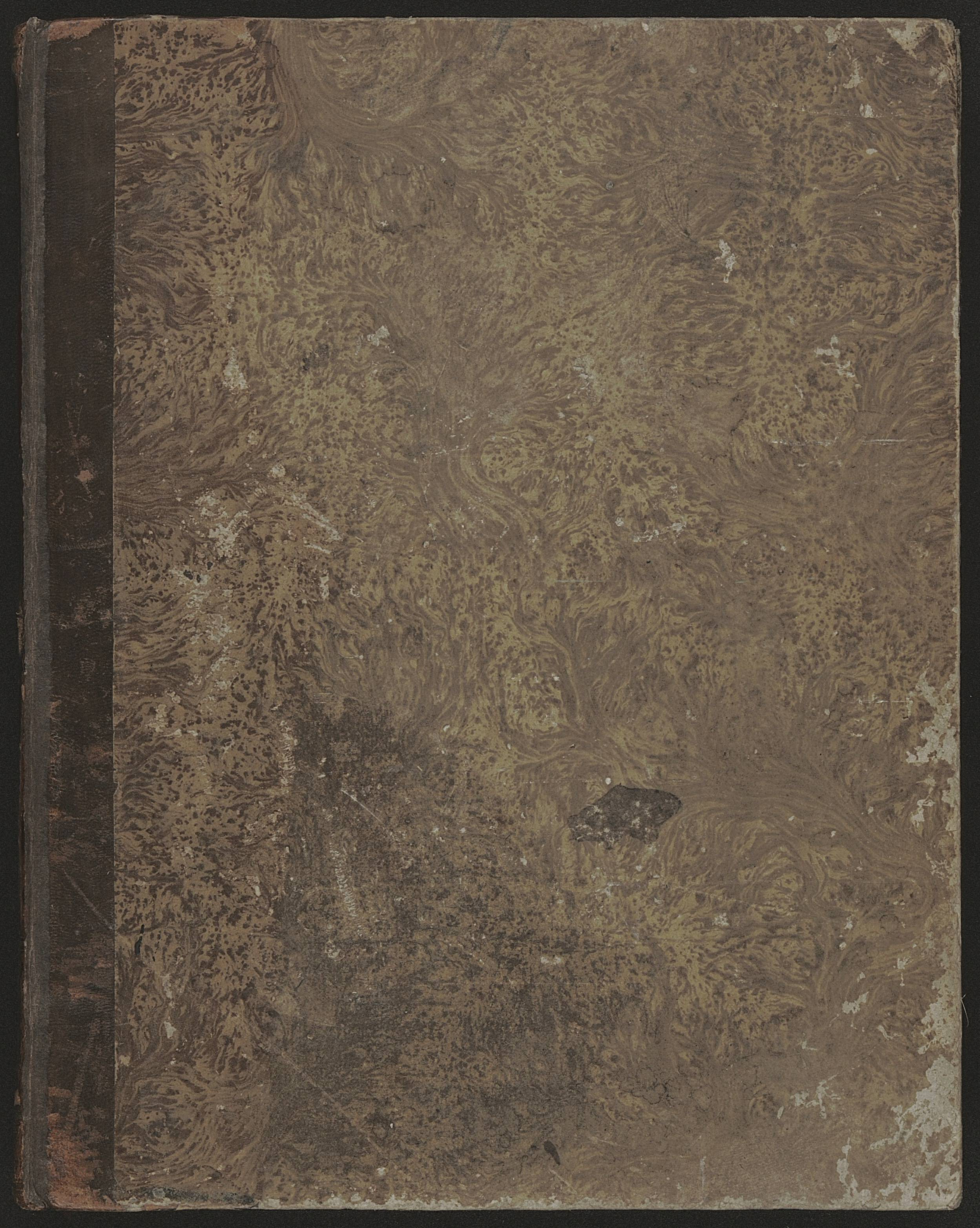
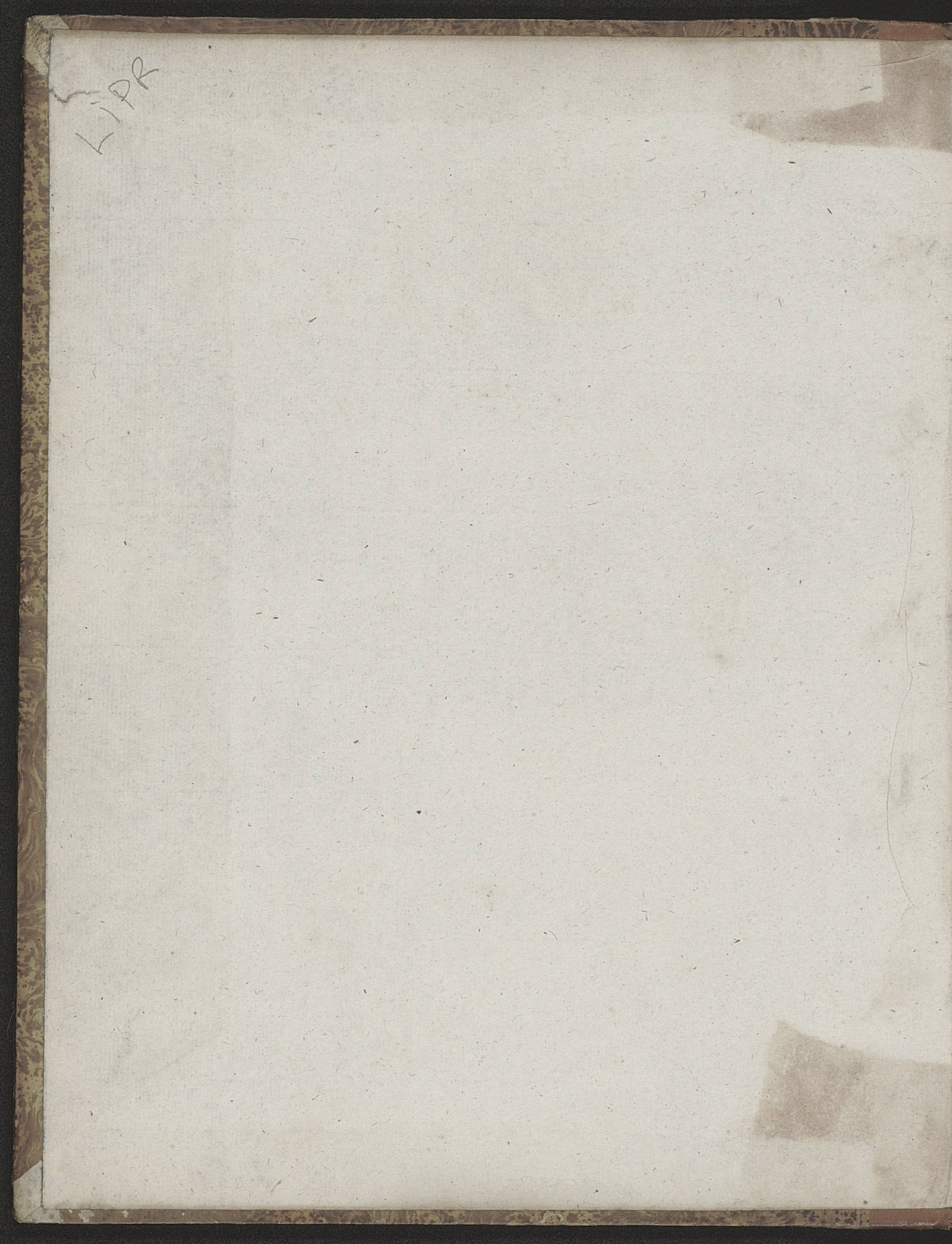



LIPR

2 mémoires Hachette
+ Carnot

SECOND SUPPLÉMENT
DE
LA GÉOMÉTRIE
DESCRIPTIVE.

AUTRES OUVRAGES DE M. HACHETTE.

Correspondance sur l'école polytechnique, années 1804 — 1815, 3 vol. in-8°, avec 42 planches.

Programme d'un cours de physique, 1 vol. in-8°, 1809.

Premier supplément de la géométrie descriptive, 1 vol. in-4°, avec 11 planches; année 1812.

Sur la composition des machines, par MM. Hachette, Lanz et Betancourt, 1 vol. in-4°, 12 planches; années 1808.

L'idée principale de cet ouvrage consiste dans la division de toutes les formes des machines élémentaires, en dix séries.

Traité élémentaire des machines, 1 vol. in-4°, avec 28 planches; année 1811, 1re édition; année 1814, 2e édition.

Géométrie descriptive et ses applications, planches gravées, sans texte, à l'usage de l'école polytechnique; année 1817, 1 vol. in-folio.

Éléments de Géométrie à trois dimensions, en deux parties, synthétique et analytique, 1 vol. in-8°, 1817, chez F. Didot, rue Jacob, n° 24.

SECOND SUPPLÉMENT
DE
LA GÉOMÉTRIE
DESCRIPTIVE,

PAR M. HACHETTE,
Professeur adjoint de la faculté des sciences, chargé de l'enseignement de la Géométrie descriptive; ancien Professeur de l'École Polytechnique;

SUIVI

DE L'ANALYSE GÉOMÉTRIQUE DE M. JOHN LESLIE,

Professeur de Mathématiques à l'Université d'Édimbourg.

A PARIS,
CHEZ FIRMIN DIDOT, IMPRIMEUR DU ROI,
DE L'INSTITUT, ET DE LA MARINE, RUE JACOB, N° 24.
1818.

AVERTISSEMENT.

Explication des abréviations employées dans le texte du second supplément de la Géométrie descriptive.

La lettre (E.....) en parenthèse, et suivie de chiffres, indique le renvoi aux Éléments de Géométrie à trois dimensions.

Lorsqu'une figure est rapportée à deux plans, l'un horizontal, l'autre vertical, les points de la projection horizontale sont marqués par de grandes lettres romaines, et ceux de la projection verticale par de petites lettres italiques.

On désigne un point dans l'espace de deux manières, ou par les deux lettres de ses projections horizontale et verticale, mises en parenthèse, ou par la lettre de sa projection horizontale seulement, mise aussi en parenthèse; ainsi le point (A, a) s'entend d'un point dont les projections sont A et a, et la lettre (A) désigne le même point dans l'espace.

Droite (AA', aa'). Cela signifie une droite qui a pour projections les droites AA' et aa'.

Plan ($AA'\ aa'$); c'est-à-dire dont les traces sur les deux plans principaux de projections sont AA' et aa'.

Plan (AA'); c'est-à-dire un plan dont la trace sur l'un des plans de projection, est la droite AA', et qui est perpendiculaire à ce plan.

AVIS AU RELIEUR.

On placera les huit planches du supplément de la Géométrie descriptive après la page 32, et les trois planches de l'*Analyse Géométrique*, à la fin de l'ouvrage.

INTRODUCTION.

Les propriétés de l'étendue considérée dans les trois dimensions, peu connues des anciens géomètres, ont été dans ces derniers temps l'objet de l'une des plus belles applications de l'analyse. C'est seulement en 1729 qu'on a publié un traité des courbes à double courbure, dans lequel on a rapporté les points des courbes ou des surfaces auxquelles elles appartiennent, à trois plans rectangulaires; cet ouvrage est le premier où l'on a exprimé les relations des coordonnées de ces points, par des équations d'où l'on a déduit les propriétés des courbes, leurs tangentes, leur quadrature, leur rectification, etc. Ce travail d'un auteur qui n'avait encore que seize ans (Clairaut), a ouvert un nouveau champ aux recherches des géomètres. L'analyse s'est perfectionnée; elle s'est enrichie du calcul aux différences partielles et du calcul des variations, et la géométrie a constamment suivi les progrès de l'analyse infinitésimale. Euler fit l'application de cette nouvelle analyse à la recherche des courbes qui jouissent de certaines propriétés de *maximum* ou *minimum;* c'est à lui qu'on doit le livre qui a pour titre: *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentibus*, *anno* 1744, que M. Lagrange regardait comme le chef-d'œuvre de ce grand géomètre. C'est aussi à Euler qu'on doit la théorie de la courbure des surfaces, exposée dans un très-beau mémoire de 1760 (Académie de Berlin) (1). Meusnier en

---

(1) Euler est le premier géomètre qui se soit occupé de la théorie des surfaces développables. Le mémoire de 1771 (*Académie de Pétersbourg*, tome 16, *novi com-*

1776 (*savants étrangers de l'Académie de Paris*, tome 10) a complété cette théorie de la courbure des sections normales d'une surface, en déduisant de l'expression du rayon de courbure d'une section normale quelconque, celle du rayon de courbure d'une section oblique dont le plan mené par la tangente à la section normale, fait avec le plan de cette section, un angle donné.

On sait ce qui a été fait depuis cette époque sur l'analyse appliquée à la géométrie (1), par les professeurs qui ont fondé l'enseignement de l'Ecole polytechnique, et sur-tout par le savant géomètre qui a conçu le projet de cet établissement. Ses ouvrages, ceux des élèves formés par ses leçons ou ses écrits, ont changé la face de cette branche de mathématiques, tant par l'ordre et la symétrie des calculs, que par l'enchaînement des propositions.

Avant ces découvertes, d'autres savants avaient cultivé la Géométrie aux trois dimensions en suivant la méthode synthétique, et leurs travaux quoique moins brillants et d'un ordre moins élevé dans leurs résultats, ont encore le mérite particulier d'exercer l'intelligence des commençants, et de faire passer des abstractions de la science, aux applications les plus usuelles.

Fermat, au commencement du dix-septième siècle, avait résolu

---

mentarii) contient des recherches analytiques fort savantes sur les conditions auxquelles doivent satisfaire les fonctions arbitraires qui entrent dans l'équation finie d'une surface développable; mais en comparant ce mémoire à celui de Monge de 1771, ou mieux encore à celui de 1775 (tomes 9 et 10 *des Savants étrangers*, *Académie de Paris*), on reconnaîtra facilement que l'analyse de Monge, fondée sur des considérations géométriques, conduit plus directement au but principal, qui est l'expression analytique de la génération des surfaces développables. Néanmoins Euler, dans ce mémoire de 1771, montre clairement que la surface de l'ombre d'un corps opaque, dans l'hypothèse d'un corps lumineux, est développable, et la seconde partie du mémoire de Monge de 1775, repose sur cette considération.

(1) Voyez la préface du grand calcul différentiel de M. Lacroix, année 1810.

cette question : Trouver le centre et le rayon d'une sphère qui touche quatre sphères données.

La trigonométrie sphérique aussi ancienne que l'astronomie, comprend la solution de la pyramide triangulaire. Les formules algébriques mises sous la forme qui convient pour l'usage des tables de logarithmes, ne laissent rien à desirer pour le calcul numérique des lignes qui déterminent un triangle sphérique, ou une pyramide triangulaire dans laquelle on ne considère que les angles des arêtes et des faces; mais elles n'indiquent pas les constructions géométriques qui mènent le plus directement des lignes connues dans une pyramide, aux inconnues. Pour trouver ces constructions, il fallait considérer la trigonométrie sphérique sous un autre point de vue, et se proposer de résoudre tous les problêmes qu'elle présente avec le plus petit nombre de lignes possible, et en ne faisant usage que de la règle et du compas.

On ne peut pas douter que ces problêmes n'aient été ainsi résolus par les inventeurs de *l'art du trait*, mais il ne reste aucun écrit qui le constate, et quoique les Arabes et les Goths eussent fait pour la construction de leurs monuments, un fréquent usage de cet art, ils ne nous ont transmis ni les noms des hommes qui l'ont inventé, ni la connaissance des principes de géométrie qui lui servent de base. Sur la fin du seizième siècle, quelques-uns des procédés de cet art ont été décrits dans un traité d'architecture par Philibert de l'Orme, aumônier de Henri II. En 1642, Jousse publia un traité de coupe des pierres, sous le titre de *Secrets de l'Architecture*; ce qui prouve qu'à cette époque la pratique de l'art du trait n'était connue que d'un petit nombre d'initiés qui suivaient quelques écoles particulières. En 1649, François Derand, jésuite, et Desargues, architecte de Lyon, dévoilèrent un plus grand nombre des secrets de ces écoles, dans leurs traités de la coupe des pierres. En 1728, M. De la Rue,

architecte, fit un recueil de dessins géométraux qui surpassaient en exactitude tout ce qui avait été fait avant lui; mais le texte explicatif ne répondait pas à la beauté des dessins. M. Frézier, savant officier du génie qui s'était principalement occupé de la géométrie nécessaire pour entendre les constructions graphiques transmises par les anciens, publia en 1750 un ouvrage sur la théorie de la coupe des pierres et des bois, qui est encore très-recherché par les ingénieurs. Il contient la solution graphique de ce problême:

Etant données les trois faces d'une pyramide, trouver les trois angles? elle avait été donnée antérieurement dans le recueil latin du P. Deschalles, qui a pour titre : *Mundus mathematicus, cap. de lapidum sectione*, *anno* 1672. Une nombreuse collection d'épures de stéréotomie, de coupe de pierres, de charpente, avait été dessinée d'après les ouvrages qu'on vient de citer, pour l'instruction des élèves de l'école du génie établie à Mézières (1). M. Monge qui a professé dans cette école pendant 20 ans (de 1764 à 1784), et qui, jusqu'en 1795, avait seulement publié ses mémoires de géométrie analytique dans les collections académiques, a écrit cette année, pour

---

(1) Cette école créée en 1748 sous le ministère de M. d'Argenson, a servi de modèle pour l'organisation de l'école polytechnique; elle fut dirigée à l'époque de sa formation par de savants et laborieux officiers du génie, MM. Duvignau et Chastillon, qui ont eu pour dignes successeurs, d'autres officiers du corps non moins recommandables, MM. de Ramsault, le comte de Jaubert, etc.

Un décret du 12 février 1794 transféra l'école du génie de Mézières à Metz; par un autre décret du 11 mars suivant, une commission a été chargée de préparer l'établissement de l'école centrale *des travaux publics*. Vers le milieu de novembre, même année, on ouvrit l'école préparatoire des chefs de brigade, et le 21 mars 1795, l'école centrale des travaux publics fut mise en activité, (voyez *la Notice historique*, *tome* 1 *de la Correspondance*, page 327). Quelques mois après, on changea son nom en celui d'*Ecole polytechnique*, en lui conservant sa première destination, de donner aux élèves des services publics civils et militaires, le premier degré d'instruction. En 1803, un décret a rendu l'école de Metz commune aux élèves de l'Ecole polytechnique qui sont admis dans les services militaires de l'artillerie et du génie.

les écoles normales, les leçons de géométrie descriptive qu'il y a données. Ces leçons disséminées dans plusieurs volumes du journal de ces écoles, ont été réunies en un seul, et publiées par mes soins en 1799. Cette première édition fut suivie de plusieurs autres sans aucun changement. Cependant la science avait fait quelques pas, et en 1812 j'ai publié une édition conforme aux précédentes, avec un supplément sur lequel on a fait le 23 mars de cette année, le rapport à l'Institut, qui est imprimé dans la Correspondance sur l'école polytechnique, tome 3, page 234.

Avant de faire connaître l'objet du second supplément, il était nécessaire de rappeler le premier; celui-ci contient une proposition remarquable par ses conséquences, que j'ai développée dans un ouvrage récemment publié sous le titre d'*Eléments de géométrie à trois dimensions.*

La démonstration de cette proposition repose sur la connaissance d'une surface dite *hyperboloïde à une nappe*, engendrée par une ligne droite mobile qui s'appuie sur trois droites fixes. J'ai fait voir que, de quelque manière qu'on fît mouvoir une droite, la surface réglée qui en est le lieu, pouvait être touchée suivant cette droite considérée dans une position quelconque, par une infinité d'hyperboloïdes à une nappe, ou de paraboloïdes hyperboliques, qui n'en diffèrent que parce que les trois droites directrices de la droite mobile sont parallèles à un même plan. Pour le démontrer, il suffit de considérer que trois droites quelconques de la surface réglée déterminent un hyperboloïde à une nappe, et que lorsque ces trois droites sont contiguës et infiniment voisines, l'hyperboloïde devient osculateur de la surface réglée; mais s'il n'y a qu'un seul hyperboloïde osculateur, il est évident qu'il y a une infinité d'hyperboloïdes simplement tangents qui passent tous par deux droites consécutives et infiniment voisines de la surface réglée, et par une troisième droite prise arbitrairement, en sorte que tous ces hyperboloïdes tangents à

la même surface réglée, sont aussi tangents entre eux. Nous avions démontré, dans notre traité des surfaces du second degré, la propriété de l'hyperboloïde à une nappe de pouvoir être engendré par une droite de deux manières différentes, et cette propriété combinée avec la précédente, m'a conduit aux propositions suivantes, 1° parmi tous les plans qui passent par une droite d'une surface réglée, un quelconque est tangent à cette surface en un point de la droite, quoiqu'il coupe toutes les autres droites adjacentes; 2° l'un quelconque de ces plans étant donné, le point de contact est déterminé par la rencontre de la droite qui contient ce point, et de la courbe qui est le lieu des points d'intersection des autres droites de la surface et du plan donné, en sorte que ce plan est à-la-fois tangent et sécant; 3° le point de contact étant donné sur une droite de la surface réglée, on détermine le plan qui est tangent à la surface en ce point, en substituant à cette surface un hyperboloïde ou un paraboloïde tangent suivant la droite donnée.

Ce qui est remarquable dans ces propositions, c'est qu'elles ramènent une construction géométrique qui dépendait d'une analyse transcendante, à la solution d'un problême de géométrie très-simple, qui consiste à trouver l'intersection d'une droite et d'un plan. En partant de ce résultat, je me suis proposé la question suivante : *Etant donnée une courbe plane ou à double courbure, en relief ou par ses projections, lui mener une tangente par un point donné sur ou hors la courbe?*

Pour la résoudre, on place la courbe sur deux surfaces réglées dont chacune a pour directrices cette courbe et deux droites prises arbitrairement ; les plans tangents à ces surfaces, menés par le point donné sur la courbe, se coupent suivant la tangente demandée. Après avoir exposé cette solution avec tous ses développements dans les Éléments de géométrie à trois dimensions, et ayant ainsi complété la théorie des contacts du premier ordre, j'ai cherché à in-

troduire dans la Géométrie descriptive les notions de courbure ou de contact du second ordre, qui ont été jusqu'à-présent le domaine exclusif de l'analyse appliquée à la Géométrie.

Je n'aurais pas démontré le théorême d'Euler sur les rayons de courbure pour les deux genres de surfaces le plus souvent employées dans les arts, savoir les surfaces développables et les surfaces de révolution, d'autres raisons détermineraient à l'admettre comme une proposition démontrée par l'analyse, pour en déduire les constructions relatives aux contacts du second ordre. De même que pour les calculs arithmétiques, on apprend l'usage des logarithmes sans qu'il soit besoin d'en connaître la théorie, on peut en géométrie, comme en mécanique pratique ou en astronomie, admettre un résultat ou une formule qui ne serait démontrée que par une analyse transcendante. Je ne crois pas qu'on sorte des limites d'un cours de géométrie descriptive, eût-il principalement pour objet les applications aux arts, en apprenant à se servir d'une formule simple, telle que celle d'Euler sur la courbure des surfaces, qui donne pour chaque élément d'une surface, la grandeur de la courbure de cet élément, dont on connaît déja la direction par le plan tangent (voyez cette formule dans l'appendice de nos Éléments de géométrie à trois dimensions). Mais pour appliquer cette formule à toutes les surfaces dont on connaît la génération, ou qui sont définies, il ne suffisait pas de connaître la tangente en un point donné d'une ligne de cette surface, il fallait encore construire le rayon de courbure et le plan osculateur de cette ligne au même point. Ayant résolu cette dernière question, j'ai pensé qu'un second supplément de la Géométrie descriptive était nécessaire, pour faire voir comment les théorêmes généraux sur les tangentes et les rayons de courbure, exposés dans nos Éléments de géométrie à trois dimensions, s'appliquaient à des cas particuliers. En séparant ces applications de la théorie, et supposant au lecteur les connaissances pratiques du tracé graphique, on

abrège l'explication des figures rapportées à plusieurs plans de projection. Cet avantage résulte de la division que j'ai proposée, et qui consiste à nommer *Géométrie à trois dimensions*, l'ensemble des propositions relatives à l'étendue et à ses formes, et *Géométrie descriptive*, la science qui apprend l'usage de la règle et du compas, pour la solution des problêmes de la Géométrie à trois dimensions.

Je rappellerai ici une observation importante; j'ai fait remarquer que toutes les opérations graphiques de la Géométrie descriptive se réduisaient à deux seulement, qui consistent à trouver la distance de deux points dont on a les deux projections, et à déterminer le point de rencontre d'une droite menée par deux points donnés et d'un plan qui passe par trois points aussi donnés. (Voyez nos Éléments, pag. 10.) Ces deux questions étant résolues avec la règle et le compas, toute la Géométrie descriptive est ramenée à la Géométrie plane. C'est pourquoi les jeunes gens qui desireront se fortifier sur les éléments de géométrie, et ensuite cultiver la Géométrie descriptive, devront d'abord s'exercer à trouver la solution d'un grand nombre de problêmes de la Géométrie plane. C'est ce motif qui m'a déterminé à faire passer dans notre langue un livre d'un physicien célèbre, professeur de mathématiques à l'université d'Edimbourg, M. John Leslie. Ce livre, dont il a déja été fait mention dans l'avant-propos de la partie algébrique de nos Éléments de géométrie à trois dimensions, a pour titre: *Analyse géométrique* (1). Il forme la seconde partie d'un ouvrage anglais (2) imprimé à Edimbourg en 1811. On y a réuni avec beaucoup d'ordre et de clarté les problêmes les plus intéressants de la

---

(1) Voyez la note page 102.

(2) *Elements of geometry, geometrical analysis, and plane trigonometry*; — vol. in-8°, seconde édition, année 1811, 500 pages.

On a du même auteur les trois ouvrages suivants :

1° Géométrie des courbes du second degré, in-8°, 76 pages et 10 planches, année 1813 (écrit en français).

Géometrie élémentaire. J'avais confié la traduction du texte à M. Comte ancien élève de l'école polytechnique, qui desirait se faire connaître par un travail utile aux études mathématiques; il a rempli cette tâche avec le plus grand zèle. J'ai fait peu de changements à la traduction, et ce que j'ai ajouté aux démonstrations de M. Leslie, n'a pour objet que d'éviter des renvois à des ouvrages du même auteur.

Le texte est accompagné de trois planches relatives aux trois livres dont il se compose. Cet ouvrage joint à celui d'Euclide, complète la partie de la géométrie qui traite de la ligne droite et du cercle considérés sur un plan, et fait connaître la méthode que les anciens géomètres ont suivie dans leurs recherches et dans leurs démonstrations.

On verra encore une application de cette méthode dans le mémoire sur le contact des sphères par Fermat, que j'ai traduit du latin, et qui termine les cahiers 7 et 8 du Journal in-4° de l'école polytechnique, ou l'on a réuni les leçons de mathématiques élémentaires, données en 1795 aux écoles normales, par deux célèbres géomètres, MM. Lagrange et Laplace.

2° *Short account of experiments and instruments depending on the relations of air to heat and Moisture; Edinburgh*, 1813.

3° *An experimental inquiry into the nature and propagation of heat*; vol. in-8°, 562 pages, 11 planches; année 1804.

C'est dans ce dernier ouvrage que l'on trouve les belles observations sur le calorique rayonnant, rapportées par M. Biot dans son traité de physique, tome 4, page 644. Tout le monde connaît cette curieuse expérience de la formation de la glace par une évaporation subite et par l'absorption des vapeurs d'un liquide à mesure qu'elles se forment; elle est aussi décrite par M. Biot, tome 1, page 332 de sa physique. C'est à M. Leslie qu'on doit les premières expériences qui ont fait connaître que l'intensité des rayons de chaleur sortis d'un même élément de la surface d'un corps, varie avec l'angle d'émission, et qu'elle est proportionnelle au sinus de cet angle. (Voyez *la Théorie physique de la chaleur rayonnante*, par M. Fourier, *Annales de chimie et de physique*, par MM. Gay-Lussac et Arago; cahier de novembre 1817, page 259).

Des Planches jointes au second supplément de la Géométrie descriptive.

Des huit planches jointes au texte de ce second supplément, la première contient l'application de la méthode synthétique des tangentes au cas particulier d'une section conique. Les trois suivantes présentent des exemples de plans tangens de la seconde espèce, qui sont à-la-fois tangents et sécants des surfaces, lorsque ces surfaces ont pour le point de contact, deux rayons de courbure de signes contraires.

La planche 5 est relative à la discussion des sections d'un tore, dont les plans passent par une normale donnée de ce tore.

Les planches 6 et 7 font voir l'application du théorême d'Euler à la construction géométrique des rayons de courbure et des plans osculateurs de deux courbes à double courbure, l'une qui résulte de l'intersection de deux cylindres droits à base circulaire, l'autre qui appartient à l'intersection d'un tore et d'une sphère. Les géomètres reconnaîtront dans cette nouvelle application, les avantages des constructions de la Géométrie descriptive, pour la détermination la plus directe et probablement la plus simple des quantités qui fixent la courbure des lignes et des surfaces. Les formules analytiques qui donnent ces quantités sont tellement compliquées, qu'on n'a pas cru jusqu'à-présent pouvoir en faire usage dans des cas particuliers, autrement que par la substitution des nombres aux expressions algébriques.

La planche 8 extraite de la correspondance sur l'école polytechnique, représente les courbes d'intersection de trois surfaces annulaires, auxquelles on pourra appliquer pour la recherche des rayons de courbure et des plans osculateurs de ces courbes, le même mode de construction que pour les lignes des planches 6 et 7.

Les dessins de ces planches ont été pour la plupart faits par l'un de mes parents, M. Toussaint (de Mézières), élève distingué de l'école polytechnique, qui suit actuellement une exploitation de mines de plomb argentifère.

GÉOMÉTRIE
DESCRIPTIVE.

SECOND SUPPLÉMENT.

§. Ier.

Définition des divers modes de projection dont on fait usage dans la Géométrie descriptive.

1. Un mode de projection, quel qu'il soit, a pour objet de déterminer la position respective des points situés dans l'espace. Pour le définir, on doit donner la surface sur laquelle on projette chaque point de l'espace, et la droite qui projette ce point. Le choix du mode de projection est aussi important pour la solution graphique des problêmes de géométrie descriptive, que celui du système des coordonnées pour la solution des problêmes d'analyse appliquée à la Géométrie aux trois dimensions.

Le mode de projection le plus simple, et dont on fait le plus souvent usage, se nomme *projection orthogonale*. Il consiste à projeter les points de l'espace sur un plan, par des droites perpendiculaires à ce plan : on nomme les droites par lesquelles on projette les points, *lignes de projection*, et le plan sur lequel on les projette *plan de pro-*

jection (E, 2) (1). Lorsque les lignes de projection sont obliques par rapport au plan de projection, on dit que la projection est *oblique*. Si elles concourent vers un point fixe, la projection se nomme *perspective linéaire*, ou simplement *perspective*.

2. En supposant que les lignes de *projection* soient des parallèles ou des droites concourantes vers un point fixe, on peut substituer au plan de projection une surface courbe connue et définie, par exemple, la sphère. La projection la plus générale d'une ligne quelconque, plane ou a double courbure, dépend de deux surfaces; la première ou celle sur laquelle on projette, est *la surface de projection*; la seconde appartient à une série de droites qui forment une *surface réglée*, dont la nature est déterminée par le mode de projection, (E, 24).

3. Les propositions relatives aux projections orthogonales d'un système de points, ou des lignes droites, sont l'objet des articles (6—17) ou des pages 6—9 de nos éléments de géométrie à trois dimensions; les propositions suivantes se rapportent aux deux modes de projections *oblique* et *perspective*.

Première proposition. Toutes les lignes tracées sur un cylindre étant projetées sur un plan ou toute autre surface, par des droites parallèles aux arêtes du cylindre, la ligne d'intersection du cylindre et de la surface de projection, ainsi que toutes les lignes du cylindre projetées sur cette surface, coïncident en totalité ou en partie.

Deuxième proposition. Toutes les lignes tracées sur un cône étant projetées sur un plan ou toute autre surface par des lignes concourantes vers le sommet du cône, la ligne d'intersection du cône et de

---

(1) Ce renvoi signifie : *Eléments de Géométrie à trois dimensions*, art. 2.

la surface de projection, ainsi que toutes les lignes du cône projetées, coïncident en totalité ou en partie.

4. La combinaison de plusieurs modes de projections conduit dans quelques cas particuliers à des solutions plus élégantes que celle qu'on obtiendrait en n'employant que la projection orthogonale. En voici quelques exemples:

PREMIER EXEMPLE. *De l'intersection d'un cylindre, et d'une surface quelconque définie.*

Les deux surfaces étant coupées par un système de plans parallèles, on conçoit que les deux sections faites par l'un de ces plans peuvent être projetées sur un plan fixe par des droites parallèles aux arêtes du cylindre. Dans cette hypothèse, la projection de la section du cylindre sera constante, et il pourra arriver qu'elle rencontre ou qu'elle ne rencontre pas la projection de l'autre section qui est une ligne de la surface donnée; si elle la rencontre, la parallèle et l'arête du cylindre menée par le point de rencontre, coupera la section plane de la surface en un point qui appartiendra à l'intersection de cette surface et du cylindre.

Toutes les opérations relatives à la projection oblique qui se fait par des droites parallèles aux arêtes du cylindre, se réduisent aux deux constructions graphiques fondamentales de la géométrie descriptive. (Art. 18, page 10 des Éléments).

DEUXIÈME EXEMPLE. *De l'intersection d'un cône et d'une surface de révolution.*

5. Les deux surfaces étant coupées par une série de plans perpendiculaires à l'axe de révolution, on considère la section du cône faite par un plan quelconque de cette série, comme la base de ce cône, et on projette sur ce premier plan les sections circulaires de la surface de révolution, par des lignes concourantes vers le sommet du

cône. Les projections des sections circulaires sont évidemment d'autres cercles parmi lesquels on distingue ceux qui rencontrent la base du cône. Par le point où l'un de ces cercles coupe la base du cône, on mène une arête du cône qui rencontre la section circulaire de la surface de révolution dont ce cercle est la projection perspective, et le point de rencontre appartient à l'intersection de cette surface et du cône.

6. S'il s'agissait de trouver l'intersection d'un cylindre et d'une surface de révolution, on substituerait à la projection perspective la projection oblique, en prenant pour lignes de projections des droites parallèles aux arêtes du cylindre. On trouverait par les mêmes considérations l'intersection d'un cône ou d'un cylindre par une surface qui aurait pour génératrice une courbe plane de forme constante ou variable, dont le plan se mouvrait parallèlement à lui-même. On prendrait pour la base du cône la section de ce cône par un plan parallèle à celui de la courbe mobile. Dans le cas le plus général où la surface serait engendrée par une ligne quelconque variable de forme et de position, on couperait cette surface et ce cône par une suite déterminée de plans parallèles à un plan fixe pris arbitrairement, et la projection perspective de chaque couple de sections déterminerait des points de la ligne d'intersection du cône et de la surface.

§. II.

Méthode synthétique des tangentes.

(Voy. l'exposé de cette méthode, *Eléments de Géométrie à trois dimensions*, art. 4, p. 58.)

Application à une ellipse dont le contour est donné. (Pl. 1, fig. 1).

7. Soit ABCOE le contour donné d'une ellipse, on demande la tangente en un point quelconque A de ce contour.

1

Le point A étant donné, les quatre autres points B, C, O, E sont pris arbitrairement sur le contour de l'ellipse. Je suppose qu'on sache que cinq points d'une ellipse déterminent cette courbe. Cette proposition étant admise, il s'ensuit qu'un hyperboloïde à une nappe (E, art. 24), qui est assujéti à passer par cinq points du contour d'une ellipse, contient l'ellipse entière.

Pour appliquer notre méthode générale (art. 56—57, pag. 58 E) à ce cas particulier, nous menerons par les deux premiers points A, B de l'ellipse (*fig.* 1, pl. 1) deux droites quelconques D, D′, par exemple ; l'une D est la verticale (A, aa'); l'autre D′ est une oblique (BB′, bb') projetée en bb' (*fig.* 2) sur un plan de projection XY verticale et parallèle à BB′ (*fig.* 1).

Concevons trois autres droites d, d', d'' qui s'appuient sur les deux premières D, D′, et qui passent par les trois points C, O, E; leurs projections sont respectivement (*fig.* 1 et 2) (CHA, *ch*), (OKA, *ok*), (ELA, *el*).

Par l'un de ces trois points, O par exemple, on mène une droite D″ qui s'appuie sur les deux droites d, d'', et a pour projections les droites OP, *op* (*fig.* 1 et 2); cette droite D″ ou (OP, *op*) résulte de l'intersection des deux plans qui passent par le point O et par les droites (CHA, *ch*), (ELA, *el*).

Les deux systèmes de droites (D, D′, D″) et (d, d', d'') déterminent les directrices de la droite génératrice de l'hyperboloïde à une nappe qui passe par cinq points de l'ellipse donnée, et par conséquent contient l'ellipse entière. D'où il suit que le plan tangent à cet hyperboloïde au point A et le plan de l'ellipse se coupent suivant une droite AR qui touche l'ellipse en ce point A.

Le plan tangent au point A de l'hyperboloïde passe par la verticale D ou (A, aa'), et par une droite qui s'appuie sur les deux directrices D′ et D″ ou (BB′, bb') et (OP, *op*); la projection AR (*fig.* 1) de cette droite est la tangente demandée. On obtient un point R de

cette tangente par l'intersection des deux droites B'R, PR, respectivement parallèles à AB et AO. Ces parallèles sont les projections horizontales de deux horizontales, intersections d'un plan horizontal xy (*fig.* 2) et des plans conduits par le point A et par les droites (BB', bb'), (OP, op).

8. On construirait la tangente OQ au point O de l'ellipse, en menant un plan horizontal tel que celui dont la trace est xy, (*fig.* 2), qui couperait les deux droites de l'hyperboloïde menées par le point O, en deux points dont les projections horizontales sont O' et P. La droite OQ parallèle à celle qui joindrait les deux points O' et P, serait la tangente demandée.

9. Dans le cas général, on place la courbe proposée sur une surface réglée, et on détermine l'hyperboloïde à une nappe qui est tangente à cette surface, suivant une droite menée par un point donné sur la courbe. Mais dans ce cas particulier où la courbe proposée est du second degré, il y a une infinité d'hyperboloïdes réglés qui peuvent la contenir, et pour obtenir l'un de ces hyperboloïdes, on a pris sur l'ellipse cinq points dont un est le point pour lequel on demande la tangente. On a mené par deux des cinq points deux droites quelconques, et par les trois autres points trois droites qui s'appuient sur les deux premières. Ces trois dernières droites sont les directrices de la droite mobile, génératrice de l'hyperboloïde à une nappe dont le plan tangent en un point donné de l'ellipse, contient la tangente à l'ellipse qui passe par le même point.

§. III.

Du plan tangent de la seconde espèce. (Pl. 1, 2, 3).

(Voy. la définition de ce plan, *Eléments de Géométrie à trois dimensions*, art. 39, pag. 40).

10. *Premier exemple*. Hyperboloïde de révolution. (*fig.* 1 *et* 2, *pl.* 2).

Soit (A, *aa'*) l'axe de révolution; (CBD, *cbd'*) ou (C'B'D', *c'bd*) la droite génératrice de l'hyperboloïde; (FBE, *fbe*) étant le plus petit cercle de cette surface, AC ou AD est le rayon d'un cercle plus grand, dont le plan est à la distance *ab* ou *a'b* (*fig.* 2) du plan *ebf* du petit cercle.

Soit (G) le point (G, *g*) de l'hyperboloïde; (GD, *gd* et (GH, *gh*) les droites de cette surface qui se croisent au point (G), et dont les projections horizontales GD, GH touchent le petit cercle de gorge EFB (voyez 1er supplément art. 75, page 65), aux points B et M. Ces droites coupent le plan horizontal (*fig.* 1) aux points D, H du cercle CHD; d'où il suit que la trace horizontale du plan tangent au point (G, *g*) est la droite DH. Cette droite est par construction perpendiculaire au rayon AG; d'où il suit que le plan tangent est perpendiculaire au plan méridien AG qui passe par le point (G, *g*); ce qui doit avoir lieu, puisque la surface est de révolution (Eléments art. 61, page 63).

L'horizontale (GI, *gi*) coupe le plan vertical (*fig.* 2) au point *i*; la droite DH le coupe au point K de la droite *cd*; les deux points *k, i* (*fig.* 2) déterminent la trace *ki* du plan tangent (DH *ki*) sur le plan vertical *cd*.

11. La verticale (G, *gg'*) coupe l'hyperboloïde en deux points (G, *g*) et (G, *g'*) à égale distance du plan *ef* du petit cercle de gorge. Les plans tangents en ces deux points passent par la corde (BM, *be*) du petit cercle EBF, parallèle à la corde DH du cercle CDH; or cette première corde coupe le plan vertical *dc* au point *l*; donc la droite *ki* prolongée passe par ce point *l*. Mais l'horizontale (GI, *g'i'*) coupe le plan vertical au point *i'*; donc la droite *i'l*, menée par les points *i'* et *l*, est la trace verticale du plan tangent à l'hyperboloïde au point (G, *g'*) qui a même projection horizontale G, que le point

(G, *g*). Les deux traces *li*, *li'* (*fig.* 2) font le même angle avec l'horizontale *ef*, projection verticale du petit cercle de gorge.

12. Les deux droites de l'hyperboloïde qui passent par le point (G, *g*) coupent le plan horizontal aux points D et H, et la trace horizontale (*fig.* 1) du plan tangent en ce point est la droite DH. Les deux droites de l'hyperboloïde qui passent par le point (G, *g'*) coupent le plan horizontal aux points C et H', et la trace horizontale du plan tangent en ce point est la droite CH'. Cette dernière droite prolongée, couperait la droite *cd*, intersection des plans (*fig.* 1 et 2), en un point *k'*, qui serait sur le prolongement de la trace verticale *li'*.

13. On a démontré dans le premier supplément de la Géométrie descriptive (art. 77 et 79, pages 67 et 69) :

1° Que la section méridienne XY (*fig.* 1) est une hyperbole *yfy'* (*fig.* 2) qui a pour asymptotes, les projections (*bd'*, *bc'*, *fig.* 2) des droites génératrices de l'hyperboloïde, qui sont situées dans le plan CBD parallèles à celui du méridien XY;

2° Que le plan tangent au point B du cercle de gorge BB'EF (*fig.* 1), passe par les asymptotes (CBD, *bd'*), (CBD, *bc'*), (*fig.* 1 et 2) :

D'où il suit que les deux plans normaux qui passent par la normale de l'hyperboloïde au même point B, et par les asymptotes de l'hyperbole méridienne dont le plan est perpendiculaire à la normale, coupent l'hyperboloïde suivant deux droites.

14. *Second exemple.* Hyperboloïde à une nappe, *pl.* 3. Les sections circulaires *ef*, *cd* (*pl.* 2) de l'hyperboloïde de révolution deviennent sur l'hyperboloïde à une nappe (*pl.* 3) des ellipses semblables et semblablement placées BEFB', CDC'D' (*fig.* 1, *pl.* 3) qui se

projettent en *ef, cd* (*fig.* 2). Les tangentes à l'ellipse BEFB′ sont les projections des droites de l'hyperboloïde à une nappe. (Voy. Traité des surfaces du second degré, page 211, art. 130). Le plan tangent en un point quelconque (G, *g* ou *g′*) de cette surface est déterminé par les deux droites qui se croisent en ce point (E. art. 39), et tout ce qu'on a dit précédemment sur le plan tangent à l'hyperboloïde de révolution, s'applique également à l'hyperboloïde à une nappe. On a marqué des mêmes lettres les points analogues de ces deux surfaces, afin que l'explication précédente soit la même pour les deux planches 2 et 3. Néanmoins il faut distinguer dans cette explication ce qui est particulier à l'hyperboloïde de révolution. Ainsi la droite (A, *aa′*) pl. 3, n'est pas un axe de révolution, mais un axe principal de l'hyperboloïde à une nappe. On observera que la droite AG (*fig.* 1 *pl.* 3) n'est pas perpendiculaire à la trace DH, comme dans la fig. 1 (*pl.* 2).

15. Nous ferons remarquer que les deux demi-ellipses XZY, XZ′Y (*fig.* 1, *pl.* 3) sont divisées dans le même nombre d'arcs par les projections horizontales des droites de l'hyperboloïde; que deux quelconques de ces arcs à égale distance du grand axe XY, sont égaux; enfin que la projection horizontale d'une droite quelconque de l'hyperboloïde passe toujours par deux points de division de l'ellipse XYZZ′. Pour trouver le mode de division de cette ellipse, qui satisfait à ces conditions de symétrie, on considère un autre hyperboloïde engendré par une droite qui aurait pour directrices deux cercles égaux et parallèles (1) dont les projections ortho-

(1) Pl. 1, *fig.* 3. Nous avons démontré, dans nos éléments de Géométrie à trois dimensions, partie algébrique (pag. 197), que les surfaces du second degré peuvent être engendrées de deux manières différentes par un cercle variable de rayon, dont le centre décrit un diamètre de la surface, et dont le plan reste constamment parallèle à lui-même. L'une de ces surfaces, l'hyperboloïde à une nappe, peut aussi

gonales sur le plan de la figure 1 planche 3, seraient les ellipses (XYZ, xy) et (XYZ, $x'y'$). Ces cercles ont pour diamètres les droites (XY, xy), et (XY, $x'y'$). Les ellipses XYZ, BB′EF étant semblables et semblablement placées, on aura l'inclinaison des plans des cercles par rapport à celui de l'ellipse BB′ EF, en décrivant du point A comme centre avec AE pour rayon, un arc EP qui coupe la droite BP perpendiculaire à AB au point P. L'angle BAP mesure l'inclinaison des plans de l'ellipse XYZ et du plan du cercle qui se projette orthogonalement (*fig.* 1) suivant cette ellipse. En supposant ce cercle et l'ellipse XYZ sur le même plan, on divisera le cercle à partir du point X marqué zéro en parties egales. On divisera aussi le cercle égal et parallèle qui a pour diamètre la droite (XY, $x'y'$) dans le même nombre de parties égales, et on regardera un point quelconque H′ de division, comme l'origine de la division marquée du chiffre zéro. — La droite menée par les points X et H′ marqués du même chiffre zéro sur les deux cercles, sera une droite de l'hyperboloïde. On aura toutes les droites de cet hyperboloïde, qui, sont comprises entre les mêmes cercles et de même longueur, en joignant les points de division consécutifs marqués des

---

être engendrée par une droite mobile qui s'appuie sur trois lignes quelconques, et par conséquent sur trois cercles de cet hyperboloïde. Si l'on suppose que l'un de ces trois cercles est divisé en parties égales, la droite mobile divisera tous les autres cercles de la surface parallèles à celui-là dans le même nombre de parties égales ; d'où il suit que deux cercles et une droite déterminent l'hyperboloïde qui passe par trois cercles donnés dans des plans parallèles.

Le plan de la *fig.* 3, *pl.* 1 est parallèle à deux cercles égaux qu'on a pris pour directrices de la droite génératrice d'un hyperboloïde. Ayant divisé ces deux cercles en parties égales, on fixe la première position de la droite génératrice, en l'assujétissant à passer par deux points de division, tels que la droite qui joint ces deux points ne soit pas dans le plan des centres des deux cercles. A partir de ces deux points, les arcs de cercles interceptés par la droite mobile dans une position quelconque, sont égaux. Les projections de cette droite sur le plan de la *fig.* 3, *pl.* 1, sont tangentes à une hyperbole.

mêmes chiffres. Mais on peut mener du point X aux points H′, H″ du cercle (XY, $x'y'$),deux droites XH′, XH″; on pourra donc engendrer le second hyperboloïde de deux manières, en prenant le point H′ ou le point H″ pour le zéro de la division du second cercle; alors chaque point de ce cercle sera marqué de deux chiffres correspondants aux deux modes de génération de l'hyperboloïde.

Les deux cercles des diamètres (XY, xy), (XY, $x'y'$) du second hyperboloïde se projettent (*fig.* 1, pl. 3) suivant la même ellipse XYZ; donc les droites de cette surface qui se croisent aux points de division des deux cercles, se projettent *fig.* 1 suivant des droites qui se croisent aux points de l'ellipse XYZ. Mais les projections *fig.* 1 des points des cercles tels que H′, H″, sont sur des droites perpendiculaires à l'axe XY; donc si à partir du point X, on a divisé le cercle XYH′H″ en parties égales, les perpendiculaires abaissées de ces points de division sur le diamètre XY diviseront l'ellipse XYZ en parties inégales, et comme les droites de l'hyperboloïde, dans les deux systêmes de génération, passent par les mêmes points de division des deux cercles des diamètres (XY, xy), (XY, $x'y'$), la projection horizontale de l'une quelconque de ces droites passera par deux points de division de l'ellipse.

TROISIEME EXEMPLE. — *Plan tangent au tore. (Pl. 4).*

(Voyez *les Eléments de Géométrie à trois dimensions*, art. 39, pag. 40).

16. Soit (A, aa'), *fig.* 1 et 2, pl. 4, l'axe de révolution d'une surface annulaire ou d'un tore qui a pour génératrice le cercle (EF, $efdd'$). La perpendiculaire abaissée du centre c de ce cercle (*fig.* 2) sur l'axe aa', rencontre la surface du tore aux points (F, f), (E, e), et les plans tangents au tore menés par ces points sont de deux espèces. Le premier mené par le point (F, f) n'a de commun avec

la surface que ce point de contact. Le second mené par le point (E, e) le plus voisin de l'axe de révolution, coupe le tore; et, si l'on suppose que ce plan tourne autour de l'horizontale (GH, e) pour s'abattre sur le plan horizontal, la section du tore, *fig.* 3, sera la courbe en huit (8), $GKEL'HK'ELG$ dont les plus grandes ordonnées verticales KI, $K'I'$ égales à cd ou cd', correspondent aux abscisses égales EI, EI' demi-cordes du cercle décrit du point A comme centre avec AD pour rayon.

17. Sur eb (*fig.* 2) comme demi-axe transversal, construisons une hyperbole men qui ait son sommet au point e, et dont le rayon de courbure en ce point soit égal au rayon ce du cercle générateur du tore. On a (art. 10 de l'Appendice de nos Éléments, pag. 127) $ce = \frac{x^2}{be}$, x étant le demi-grand axe conjugué à l'axe transversal; ce qui donne $x = \sqrt{be \times ce}$, c'est-à-dire que x est une moyenne proportionnelle entre les deux lignes be et ce.

Ayant mené les asymptotes bp, bp' de l'hyperbole osculatrice du cercle edd', la droite (BP, bp) ou (BP, bp') dont la projection horizontale BP (*fig.* 1) parallèle à la droite bc (*fig.* 2), est une tangente au cercle décrit du point A comme centre avec AB pour rayon, engendre en tournant autour de l'axe de révolution (A, aa'), un hyperboloïde osculateur du tore en un point quelconque (E, e) du cercle, qui est du rayon eb; or le plan tangent au tore au point (E, e) coupe cet hyperboloïde suivant deux droites ER, ER' (*fig.* 3) qu'on obtient, art. 13, en prenant $PR = PR' = ep = ep'$; donc ces deux droites tangentes au point E de la section du tore et du plan tangent, en sont aussi osculatrices, c'est-à-dire que les rayons de courbure des deux branches de cette courbe qui se croisent au point E, sont pour ce point d'une longueur infinie. On déduit de la considération des sections normales, une autre construction des deux tangentes au point double E de la section du tore par le plan tangent au même point.

18. Le plan tangent (*fig.* 3, *pl.* 4) au point E contient les traces E A, ER' des deux sections normales l'une du rayon $ec=r$ et l'autre d'un rayon infini ; or l'angle de ces deux droites est égal à l'angle de ces deux sections ; donc la tangente de cet angle est (art. 4 de l'appendice E.) $\sqrt{\frac{R}{r}}$, la lettre R représentant la droite be (*fig.* 2).

Prenant pour unité la portion $\alpha\beta$ de la droite (*fig.* 2) comprise entre deux parallèles quelconques $c\alpha$, $e\beta$, on a à cause de $be=R$, $ec=r$, $\alpha\beta=1$,

$$r : R :: 1 : b\beta = \frac{R}{r}.$$

Ayant décrit sur $b\alpha$ comme diamètre, un demi-cercle, l'ordonnée $\beta\gamma$ de ce cercle est égale à $\sqrt{\frac{R}{r}}$. Construisant (*fig.* 3) le triangle rectangle $E\beta'\gamma'$ avec les deux côtés $E\beta'$, $\beta'\gamma'$ égaux respectivement aux droites $a\beta$, $\beta\gamma$ (*fig.* 2), l'angle $\beta' E \gamma'$ est égal à l'angle AER' complément de l'angle PER' qu'on a trouvé (article précédent) par la considération de l'hyperboloïde de révolution osculateur du tore au point E.

19. On voit par ce dernier exemple, que pour apprendre comment un plan tangent de la seconde espèce touche une surface, il est nécessaire de connaître la forme des sections normales qui passent par le point de contact, de distinguer les deux séries de sections dont les courbures sont en sens contraire par rapport au plan tangent, et de déterminer la section qui se trouve au passage de l'une des séries à l'autre. Nous reviendrons dans le paragraphe (§. V) sur la discussion des sections normales d'un tore, qui passent par les mêmes points e, f de la normale abaissée du centre du cercle générateur $efdd'$ sur l'axe de révolution. Pour éviter les répétitions : les points des figures 1 et 2, planche 4, rapportés figures 1 et 2 de la planche suivante 5, y seront marqués des mêmes lettres.

§. IV. — Pl. 1.

Construction géométrique du rayon de courbure d'une ellipse en un point donné de cette ellipse. Fig. 4, 5, 6.

(Voyez l'*Appendice de nos Eléments*, art. 8, pag. 123).

20. Soient AB, CD (*fig.* 4, 5, 6, *pl.* 1.) les diamètres conjugués d'une ellipse; on demande le rayon de courbure au point A extrémité du diamètre AB.

Pour résoudre cette question, nous considérerons l'ellipse proposée ABCD (*fig.* 4) comme une section normale d'un cylindre à base circulaire, et nous déterminerons la droite génératrice de ce cylindre.

Ayant mené par le point A (*fig.* 4, *pl.* 1) la tangente EAF parallèle au diamètre CD, et la normale AGA′, on décrira (*fig.* 5) du point G de cette normale comme centre, un cercle d'un diamètre AA′ égal à CD, tangent à l'ellipse au point A.

Considérant le plan de la *fig.* 5 comme horizontal, soit X *a* Y la trace du plan vertical de projection (*fig.* 6) perpendiculaire à la tangente EAF de l'ellipse et du cercle, dont les diamètres parallèles CD, E′F′ sont égaux. Construisons (*fig.* 6) le triangle rectangle agq dans lequel on a :

$$ag = \text{AG } (\textit{fig. } 5) = \text{OC } (\textit{fig. } 4),\ aq = \text{OP } (\textit{fig. } 4),$$

OP étant la perpendiculaire abaissée du centre O de l'ellipse sur la tangente EAF; l'angle gaq de ce triangle mesure l'angle que les plans du cercle et de l'ellipse doivent faire entre eux, pour que ces deux lignes soient sur le même cylindre. En effet concevons un cylindre dont les arêtes soient parallèles à la droite (GQ, gq) qui joint les centres O et G, *fig.* 4 et 5 de l'ellipse et du cercle, et dont la base est le cercle du rayon AG.

Les plans tangents à ce cylindre menés par les points E′, F′ extrémités du diamètre E′F′ parallèle à CD, seront coupés par le plan de l'ellipse (*fig.* 4) suivant deux droites EC, FD parallèles au diamètre AB, puisque ces plans seront parallèles à celui qui passe par les droites AG et (GQ, gq), dont la trace (*fig.* 4) est le diamètre AB.

Les plans tangents au cylindre menés par les points A, A′ extrémités du diamètre A, A′ sont évidemment coupés par ce plan de l'ellipse (*fig.* 4) suivant deux parallèles EAF, εBφ; d'où il suit que le plan dont les traces sont (*fig.* 5 *et* 6) EAF et aq, coupe le cylindre suivant l'ellipse ABCD, qui a pour diamètres conjugués les droites AB, CD. Le plan tangent au cylindre au point A, qui a pour traces (*fig.* 5 *et* 6) la tangente EAP et la droite $a\alpha$ parallèle à gq, est perpendiculaire à la droite aq, trace *fig.* 4 du plan de l'ellipse ABCD; donc le plan de cette ellipse est normal au cylindre au point A, puisqu'il passe par la normale à ce cylindre (AG, aq).

Cela posé, la section normale ABCD du cylindre, et la section circulaire oblique AE′F′A′ ayant une tangente commune au point A, les rayons de courbure de ces deux sections sont (*Théorème de Meusnier, E. art.* 77.) sur une perpendiculaire à la section oblique; or cette perpendiculaire est la droite polaire (G, gk) du cercle AE′F′A′ (*fig.* 5), et cette droite coupe le plan de l'ellipse *fig.* 4 au point K tel que AK$=ak$; donc le point K (*fig.* 4) est le centre de courbure de l'ellipse ABCD au point A extrémité du diamètre AB de cette ellipse.

21. Cette construction donne l'expression du rayon de courbure AK de l'ellipse, au moyen du diamètre CD parallèle à la tangente EAF et de la perpendiculaire AL=OP abaissée du point de contact A sur ce diamètre. En effet, on a dans le triangle rectangle agq (*fig.* 6), ag=OC=OD; aq=AL=OP, et en comparant les deux triangles rectangles agq, agk qui ont un côté commun ag, l'hypo-

thénuse ak du second triangle $= \frac{\overline{ag}^2}{aq} = \frac{\overline{OC}^2}{AL}$; valeur connue du rayon de courbure AK *fig.* 4 $= ak$, *fig.* 6.

On a supposé que la perpendiculaire OP (*fig.* 4.) abaissée du centre O sur la tangente EAF, était plus petite que le demi-diamètre OC parallèle à cette tangente, puisqu'on l'a regardée (*fig.* 6) comme le côté aq d'un triangle rectangle qui a pour hypothénuse une droite $ag = OC$; si elle était plus grande, on trouverait le rayon de courbure AK, en modifiant la solution précédente de la manière suivante.

Construction du rayon d'une ellipse, à l'extrémité d'un diamètre dont le conjugué est plus petit que le double de la perpendiculaire abaissée du centre de l'ellipse sur la tangente parallèle à ce diametre conjugué. (Fig. 4′, 5′, 6′, pl. 1).

22. Considérons l'ellipse proposée ABCD (*fig.* 4′) comme la section normale d'un cylindre qui a pour base une seconde ellipse E′AF′ (*fig.* 5′) dont le petit axe principal E′F′ est égal au petit diamètre CD de la première, et qui a pour demi-grand axe principal une droite AG′ plus longue que la perpendiculaire AL abaissée de l'extrémité A du diamètre AB conjugué à CD, sur ce diamètre CD. Le point A (*fig.* 4′) étant le sommet de cette seconde ellipse, on a vu (*Appendice* E, *art.* 8, *page* 123) que son rayon de courbure AG en ce point, est $\frac{\overline{E'G'}^2}{AG'}$ ou $\frac{\overline{OC}^2}{AG'}$.

Ayant abaissé du centre O de l'ellipse *fig.* 4′ la perpendiculaire OP sur la tangente EAF, on construit (*fig.* 6′) le triangle $ag'q$ avec l'hypothénuse $ag' = AG'$, et le côté $aq = OP = AL$. L'angle $g'aq$ de ce triangle est, d'après ce qu'on a dit article précédent, l'inclinaison des plans des deux ellipses situées sur le cylindre dont les arètes sont parallèles à la droite qui joint les centres G′, O de ces

deux ellipses, droite qui a pour projections $G'Q$, $g'q$ (*fig.* 5′, 6′). Le plan de l'ellipse (*fig.* 4′) étant normale au cylindre, les centres de courbure des deux ellipses (*fig.* 4′, 5′) sont sur une perpendiculaire (G, gk) au plan de la seconde ellipse *fig.* 5′. Cette perpendiculaire rencontre le plan *fig.* 4′ au point K, et donne pour le rayon de courbure au point A de l'ellipse ABCD, une droite AK *fig.* 4′ égale à ak., (*fig.* 6).

23. Comparant les deux triangles $ag'q$, agk (*fig.* 6), on a la proportion :

$$aq : ag' :: ag : ak, \text{ ou, } OP = AL : AG' :: AG : ak = AK.$$

à cause de $AG = \frac{\overline{E'G'^2}}{AG'}$ $\quad AL : AG' :: \frac{\overline{E'G'^2}}{AG'} : AK = \frac{\overline{E'G'^2}}{AL} = \frac{\overline{OC^2}}{AL}$,

expression de même forme que celle de l'article précédent.

§. V.

Construction des sections normales d'un tore, et des rayons de courbure de ces sections. Pl. 4 et 5.

24. Soient *fig.* 1 et 2, *pl.* 5, les points et les lignes d'un tore, marqués des mêmes lettres que sur les figures 1 et 2 de la planche 4, (art. 18).

Considérons les quatre sections de ce tore, dont les plans passent par la normale bef (*fig.* 2, *pl.* 5), et par les droites bH, bK, bL, bM, (*fig.* 3) situées dans un plan mené perpendiculairement à la normale bf. Ces plans font avec celui du petit cercle $dd'ef$ du tore, des angles respectivement égaux à ceux-ci : $a'b$H, $a'b$K, $a'b$L, $a'b$M. En supposant qu'ils aient tourné autour de la normale bf (*fig.* 2) transportée en AF (*fig.* 1), les quatre sections normales sont représentées sur le plan de cette figure 1, dans leur véritable grandeur, et

chacune est marquée d'un trait particulier qui est le même que celui de sa projection sur le plan de la figure 3.

Tous les rayons de courbure des sections normales qui se croisent au point (F, f) sont dirigés du même côté, et leurs valeurs croissantes depuis cf (*fig.* 2) jusqu'à bf, ne passent pas par l'infini. Il n'en est pas de même des sections normales qui se croisent au point (E, e), *fig.* 1 et 2. Les rayons de courbure pour ce point ne sont pas dans le même sens; il y a une section normale dont le rayon de courbure est infini, et qui sépare les deux séries de sections, les unes convexes, les autres concaves vers l'axe de révolution du tore.

Après avoir construit par la méthode connue, les lignes d'intersection du tore par les plans fbh, fbm, *fig.* 2 *et* 3, *pl.* 5, ces lignes dans leur véritable grandeur deviennent (FRES, F′R′E′S′) (*fig.* 1), et (Fμ. F′μ', Eπ E′π'); chacune d'elles est formée de deux branches séparées.

25. Les rayons de courbure de toutes les sections normales qui passent par le point (F, f) du tore, sont (appendice E, art. 3, p. 115) les rayons vecteurs d'une ellipse qui a pour grand axe la somme des deux rayons de courbure principaux fc, fb (*figure* 2); soit fH′K′L′M′f cette ellipse construite *fig.* 4, pl. 4 et 5 (voyez le côté droit de la planche 4); la droite ff' en est le grand axe; le point c en est le foyer, et les deux parties cf, cf' du grand axe sont égales aux rayons de courbure principaux cf, bf, (*fig.* 2, pl. 5) au point (F, f) du tore.

Ayant décrit du point b comme centre (*fig.* 3, pl. 5), avec un rayon quelconque bi, le cercle $ihklm$, et du point c comme centre (*fig.* 4, planche 4 et 5) avec le même rayon, le cercle $i'h'k'l'm'$, on prendra des arcs $i'h'$, $h'k'$, $k'l'$, $l'm'$ doubles des arcs ih, hk, kl, lm (*fig.* 3 pl. 5), et les rayons vecteurs cH′, cM′ (*fig.* 4, pl. 4 et 5) seront les rayons de courbure des sections normales FRE, Fμ.F′μ' (*fig.* 1, pl. 5) au point F de ces lignes.

26. La section normale fb L (*fig.* 2 et 3, pl. 5) est remarquable par cette circonstance que son plan est à-la-fois normal et tangent au tore. Il est normal au point f, puisqu'il passe par la normale bf (*fig.* 2, pl. 5) et il est tangent au point V (*fig.* 3), parce qu'il contient la tangente bV (*fig.* 3) du cercle générateur du tore dont le rayon c'V est égal à cf, (*fig.* 2). Cette section, dans son plan, a pour contour la courbe FOE'O'EOF' (*fig.* 1) qui a deux points doubles O, O'. On obtient ces points sur la droite AXY perpendiculaire à AF, en prenant

$$\text{AO} = \text{AO}' \ (\textit{fig. } 1) = b\text{V} \ (\textit{fig. } 3).$$

Les tangentes au point O (*fig.* 1) se construisent (art. 17, 18) comme les tangentes ER, ER' (*fig.* 3, pl. 4) du point double E. Les rayons de courbure principaux au point V ou V' (*fig.* 3, pl. 5) étant c'V' et V'ω, soit (*fig.* 2) $ce = c'\text{V}'$; $c\gamma = \text{V}'\omega$. Ayant mené deux parallèles quelconques $c\alpha$, $e\beta$ qui coupent aux points α, β la droite $\gamma\alpha$ perpendiculaire à $e\gamma$, on décrira sur $\alpha\gamma$ comme diamètre un demi-cercle, et l'ordonnée $\beta\delta$ de ce cercle sera $\sqrt{\frac{e\gamma}{ce}} = \sqrt{\frac{c'\omega}{\text{V}'\omega}}$, en supposant $\alpha\beta = 1$. Donc si l'on construit (*fig.* 1) les deux triangles rectangles O$\beta'\delta'$, O$\beta'\delta''$ égaux au triangle $\alpha\beta\delta$ (*fig.* 2), les deux hypothénuses Oδ', Oδ'' seront (art. 18), les tangentes au point double O.

27. Des trois sections normales du tore que nous venons d'examiner, et qui se croisent aux points E et F de ce tore, la première FRES (*fig.* 1) est convexe en E vers l'axe de révolution, et les deux autres sont concaves vers cet axe. Le rayon de courbure de la première est dirigé de E en F, et les rayons de courbure des deux autres sont dirigés en sens contraire de E vers A. Pour trouver la section normale intermédiaire, dont le rayon de courbure est infini au point E, il faut remarquer que l'hyperboloïde osculateur du tore est le même pour tous les points du petit cercle du rayon AE ou AB; or si l'on conçoit l'hyperboloïde osculateur au point (B, b), (*fig.* 1 et 2),

3.

et les deux plans normaux au même point, qui coupent cet hyperbo loïde en lignes droites, $a'bp$ (*fig.* 2) est (art. 13) l'angle que le plan du petit cercle générateur du tore fait avec l'un de ces plans normaux; donc la droite bK (*fig.* 3) qui fait avec la droite $a'b$ un angle $a'bK = a'bp$, détermine la section normale fbK (*fig.* 2 et 3) composée de deux branches FTEV, F'T'E'V' (*fig.* 1), telles que les rayons de courbure en E et E' sont infinis.

Puisque le plan tangent au tore au point E contient les tangentes de toutes les sections normales qui passent par ce point, la position de la section normale d'un rayon de courbure infini pour le même point, indique de quel côté du plan tangent, les sections normales adjacentes sont touchées par ce plan.

28. Nous avons construit l'ellipse (*fig.* 4, pl. 4 et 5) qui donne les rayons de courbure des sections dont les plans passent par la normale FA, fb (*fig.* 1 et 2, pl. 5) et qui se croisent au point (F, f). Ces mêmes sections se croisent au point (E, e), et les rayons de courbure pour ce point sont les rayons vecteurs d'un hyperbole qui a pour axe transversal la droite cc' (*fig.* 5, pl. 4 et 5), différence des droites fc', fc égales aux rayons de courbure principaux eb, ec (*fig.* 2, pl. 5) au point E du tore. Les rayons de courbure des sections normales comprises dans l'angle ibK (*fig.* 3, pl. 5) sont donnés par la branche d'hyperbole cH' (*fig.* 5, pl. 5) comprise entre l'axe $b'f$ et l'asymptote $b'p$. Les rayons de courbure des sections normales comprises dans l'angle Kbc' (*fig.* 3, pl. 5) sont les rayons de courbure de la branche d'hyperbole $c'L'$ (*fig.* 5, *pl.* 4 et 5) comprise entre l'asymptote $b'\pi'$ et l'axe transversal $b'c'f'$.

29. Les rayons de courbure principaux en un point quelconque du tore pour lequel le plan tangent est de la seconde espèce, déterminent l'hyperbole dont les rayons vecteurs sont les rayons de cour-

bures des sections normales qui passent par le même point, et par conséquent les asymptotes de cet hyperbole; d'où l'on déduit une troisième manière (voyez art. 17 et 18) de construire l'angle $a'bK$ (*fig.* 3, pl. 5), ou $a'bp$, *fig.* 2, puisqu'il est égal à la moitié de l'angle connu $f'b'p$ (*fig.* 5, pl. 4 et 5), de l'axe transversal $b'f'$ et de l'asymptote $b'p$ de l'hyperbole $H'cc'L'$.

§. VI.

Construction des plans osculateurs et des rayons de courbure des courbes à double courbure. Pl. 6, 7, 8.

Premier exemple. — *Courbe à double courbure, résultant de l'intersection de deux cylindres droits à base circulaire.* Pl. 6, *fig.* 1—5.

30. On a déja construit l'intersection de trois cylindres droits à base circulaire pour déterminer la position d'un point dont on connaît les distances à trois droites (voy. le premier supplément à la Géométrie descriptive, pag. 109, art. 125, et la planche (B) de ce supplément). Ayant extrait de cette planche (B) la projection horizontale de l'intersection des deux cylindres désignés par les lettres (A) et (B), proposons-nous de construire le plan osculateur et le rayon de courbure pour un point de cette intersection, par exemple, celui dont la projection horizontale est M, (*pl.* 6, *fig.* 1).

Les axes des deux cylindres coupent le plan horizontal aux points A et B (pl. 6, *fig.* 1), et ont pour projections sur ce plan les droites Aa, Bb. Les traces des cylindres sur ce même plan étant les ellipses CGF, $C'G'F'$, dont les petits axes CG, $C'G'$ sont égaux aux diamètres des cercles bases des cylindres, on a deux triangles rectangles FAH, $F'BH'$ dont les côtés AH, BH' respectivement égaux aux droites AC,

BC′, sont opposés aux angles HFA, H′F′B que les arêtes des cylindres font avec le plan horizontal. Le point donné M est l'intersection de deux droites MN, MN′ projection de deux arêtes des cylindres qui coupent le plan horizontal, l'une en N, et l'autre en N′.

Les tangentes NO, N′O aux points N, N′ des ellipses se coupent en un point O par lequel passe la tangente MO à la courbe MDK projection de la ligne d'intersection des deux cylindres. Désignant par (M) le point de cette ligne dont M est la projection sur le plan horizontal, et par (OM) la tangente au point (M) dont OM est la projection sur le même plan, nous allons d'abord construire le rayon de courbure ρ de la section normale du cylindre (B) dont le plan passe par la tangente (OM). Dans la formule $\rho = \frac{2r}{1 + \cos. 2A}$ que nous avons démontrée (appendice E, art. 6, pag. 120), r est le rayon du cercle base du cylindre, et A est l'angle que fait la tangente à ce cercle avec la tangente (OM) à la courbe d'intersection des deux cylindres. Connaissant cet angle dont le sommet est au point (M), on aura la valeur de ρ.

Le point (M) est le sommet de l'angle droit de deux triangles rectangles MN′m, ML′m'; le premier semblable au triangle BF′H′ a pour côté une droite Mm égale à la distance du point (M) au-dessus du plan horizontal; le second a pour côtés adjacents à l'angle droit la droite Mm'=Mm, et la perpendiculaire ML′ abaissée du point M sur la trace OL′N′ du plan qui touche le cylindre (B) au point (M): faisant tourner ce plan tangent autour de sa trace horizontale ON′ comme charnière, pour l'abattre sur le plan horizontal, l'arête du cylindre (B) qui passe par le point (M), et la tangente (OM) y deviennent N′P′ et OP′T′. Élevant la perpendiculaire P′S′ à P′N′, on a S′P′T′ pour l'angle A. Doublant cet angle, on a le cosinus de 2 A, et par conséquent la valeur $\frac{2r}{1 + \cos. 2A}$ du rayon de courbure ρ.

On a construit à part cette valeur, en prenant (*fig.* 2) : $ad = 1$,

l'arc $s't'$ du rayon ad égal au double de l'arc S′ P′ T′ (*fig.* 1); bd (*fig.* 2) $=$ cos. (2 S′ P′ T′); bc (*fig.* 2) $=$ C′ G′ (*fig.* 1).

Cette construction donne la proportion :
$ad + db : bc :: ad : de$, ou $1 + \cos. 2A : 2r :: 1 : de = \rho = \frac{2r}{1 + \cos. 2A}$.
Portant ce rayon de courbure de (*fig.* 2) sur la droite $m'e'$ (*fig.* 3) perpendiculaire à l'hypothénuse L′ m' du triangle rectangle M L′ m' (*fig.* 3), le point e' sera, dans le plan vertical de ce triangle, le centre de courbure de la section normale du rayon ρ dont le plan passe par la tangente (MO), et l'extrémité φ' de la verticale $e'\varphi'$ sera la projection horizontale du centre de courbure e'.

Faisant pour le cylindre (A) les constructions analogues à celles qu'on vient d'indiquer pour le cylindre (B), on a pour points analogues à ceux-ci : N′, m, L′, m', P′, S′, T′, les suivants dans le même ordre : N, μ, L, μ', P, S, T; le rayon ρ' de la section normale au point (M) du cylindre (A), dont le plan passe par la tangente (MO), a pour valeur $\frac{CG,}{1 + \cos. (2 SPT)}$. Ayant porté ce rayon de courbure ρ' sur la droite $\mu'\varepsilon$ perpendiculaire à Lμ', le centre de la courbure ε (1) de la section normale de ce rayon sera en projection horizontale le point φ; et la droite qui joint les centres de courbure des sections normales aux deux cylindres des rayons de courbure ρ et ρ', sera en projection horizontale la droite $\varphi\varphi'$.

Concevons par la droite qui joint les centres de courbure e' et ε des sections normales des deux cylindres (A) et (B), un plan vertical, et supposons que ce plan ait tourné autour de sa trace horizontale $\varphi\varphi'$ comme charnière pour s'abattre sur le plan horizontal; on a dans ce plan un trapèze (*fig.* 4) formé par l'horizontale $\varphi\varphi'$, et par deux verticales, l'une $\varphi'\psi' = \varphi'e'$ (*fig.* 3), et l'autre $\varphi\psi = \varphi\varepsilon$; les ex-

---

(1) Ce point ε sort du cadre de la planche; il est le point de concours des deux droites $\mu'\varepsilon$, $\varphi\varepsilon$, respectivement perpendiculaires aux droites Lμ', L Mφ.

trémités ψ' et ψ de ces verticales (1) sont les centres de courbure des sections normales des deux cylindres, dont les plans passent par la tangente (MO) de l'intersection de ces deux cylindres.

La perpendiculaire abaissée du point (M) *sur la droite* $\psi\psi'$ (fig. 4) *est le rayon du cercle osculateur demandé; et le pied de cette perpendiculaire en est le centre* : ce cercle du rayon ωz (*fig.* 4) est l'intersection de deux sphères des rayons ρ et ρ', qui ont pour centres les points ψ et ψ' (*fig.* 4). Sa projection horizontale est une ellipse ZMY (*fig.* 1), dont le petit axe ZY est dirigé suivant la droite $\varphi\varphi'$, et dont le demi-grand axe $\omega' z'$ *fig.* 1 est égal à ωz (*fig.* 4). Cette ellipse est osculatrice de la courbe KMD projection horizontale de la ligne d'intersection des deux cylindres, au point M de cette projection; son centre ω' est la projection du centre ω (*fig.* 4) du cercle osculateur.

31. Puisque le cercle osculateur passe par la tangente O(M) qui coupe le plan horizontal (*fig.* 1) au point O, la trace horizontale du plan de ce cercle est une droite Ou perpendiculaire à la trace $\varphi\varphi'$ de la *fig.* 4, et le point u est dans le prolongement de la droite ωz de cette figure. Le point (M) de l'intersection des deux cylindres étant projeté sur le plan de la *fig.* 4, sa projection λ est sur le droit M$\lambda'\lambda$ perpendiculaire à $\varphi\varphi'$, à une distance $\lambda'\lambda$ de $\varphi\varphi'$ égale à Mm ou Mm' (*fig.* 3); en sorte que si l'on ne demandait que le plan osculateur au point (M) de la ligne d'intersection des deux cylindres, il serait déterminé par ses deux traces Ou, $u\lambda$ (*fig.* 1 et 4) respectivement perpendiculaires aux droites $\varphi\varphi'$ et $\psi\psi'$ (*fig.* 4).

32. Le cylindre vertical qui a pour base le cercle osculateur au point (M), est coupé par le plan incliné normal à ce cylindre, qui

---

(1) Le point ψ sort du cadre de la planche; il est le point de concours des deux droites $\psi'\psi$, $\varphi\psi$, la seconde de ces droites étant perpendiculaire à $\varphi\varphi'$.

passe par la tangente O(M), suivant une ellipse dont le centre de courbure au point (M), est sur une droite horizontale normale au cylindre, et parallèle à la normale $M\pi m''$ de l'ellipse horizontale ZMY (*fig.* 1); or le centre de courbure de la première ellipse est (art. 77 E) sur une perpendiculaire au plan du cercle osculateur, laquelle a pour projection horizontale la droite $\varphi\varphi'\omega'\pi$ (*fig.* 1); donc la projection horizontale π (*fig.* 1) de ce centre de courbure est l'intersection de la droite $\varphi\varphi'$ et de la perpendiculaire Mm'' à la tangente MO de la courbe KMD. Connaissant le rayon de courbure $M\pi$ de la première ellipse au point (M) du cercle osculateur, on en déduira le rayon de courbure $M\omega''$ (*fig.* 1) de l'ellipse horizontale ZMY, au point M par lequel passe la normale horizontale $M\pi$ du cylindre vertical. En effet, soit (*fig.* 5) dans le plan vertical O(M), un triangle rectangle MOm'', dont le côté Mm'' est égal Mm' (*fig.* 3), et dont l'angle MOm'', ou $\alpha O\beta$ mesure l'inclinaison de la tangente (M)O et de sa projection horizontale MO (*fig.* 1), ou l'angle de deux sections du cylindre vertical, l'une normale, l'autre oblique, qui passent par la même tangente; on a (appendice E, pag. 122, art. 6)..... $M\omega'' = M\pi \cos.^2 (\alpha O \beta)$.

Menant le diamètre $\gamma\omega'\delta$ de l'ellipse ZMY parallèle à la tangente MO, et abaissant la perpendiculaire $M\nu$ sur ce diamètre, on a vu (art. 23 § IV) que $M\omega'' = \frac{(\omega'\gamma)^2}{M\nu}$. Cette seconde valeur $M\omega''$ sert de vérification à la précédente $M\pi \cos.^2 (\alpha O \beta)$.

Deuxième exemple. — *Courbe à double courbure résultant de l'intersection d'un tore et d'une sphère. Pl.* 7, fig. 1—4.

33. Ayant pris pour plans coordonnés un plan horizontal (*fig.* 1) mené par le centre de la sphère perpendiculairement à l'axe de révolution du tore, et un plan vertical (*fig.* 2) passant par cet axe et par le centre de la sphère, les projections du cercle générateur du

tore sur ces plans, sont EF (*fig.* 1) et $efdd'$ (*fig.* 2). Les projections de l'axe de révolution sont A et aa', et celles du centre de la sphère G et g. Après avoir construit, par la méthode connue, les projections LMN, lmn de la courbe d'intersection du tore et de la sphère, on demande les cercles osculateurs de cette courbe pour deux points (M) et (N), choisis de manière que les plans tangents au tore menés par ces points, ne soient pas de même espèce. Le plan tangent mené par le point (M) ou (M, m) est de la première espèce, et les rayons de courbure des sections normales du tore qui passent par ce point, appartiennent à une ellipse (*fig.* 3), dont le grand axe op est la somme des deux rayons de courbure principaux oc, op (*fig.* 2) qui correspondent au point (M, m) (*fig.* 1 et 2) du tore.

Pour construire le point o (*fig.* 2) on mène par le point donné m (*fig.* 2), l'horizontale mo qui coupe le cercle $efdd'$ au point o; le rayon co de ce cercle étant prolongé, il rencontre la verticale aa' projection de l'axe du tore au point p; ce qui détermine les rayons de courbure principaux oc, op au point (M) ou (M, m) du tore.

Les plans tangents au tore et à la sphère menés par le point (M) de la courbe d'intersection de ces deux surfaces, se coupent suivant une tangente à cette courbe, que je désigne par la lettre (T). Leurs traces sur le plan horizontal $\omega\omega'$ (*fig.* 2) qui touche le tore suivant le cercle supérieur du rayon da', ont pour projections horizontales (*fig.* 1) les droites $\alpha\beta$, $\alpha'\beta$ (*fig.* 1) qui se rencontrent au point β, projection horizontale de l'un des points de la tangente (T). Cette tangente fait avec la tangente au cercle générateur du tore, menée par le point (M), un angle $\alpha\gamma\beta$ opposé au côté horizontal $\alpha\beta$ du triangle rectangle $\alpha\beta\gamma$, et adjacent au second côté $\alpha\gamma = oq$ (*fig.* 2) de ce triangle. Connaissant cet angle, on en déduira le rayon de courbure de la section normale au tore, menée par la tangente (T). En effet, ayant construit l'ellipse (*fig.* 3), et l'angle $oc\delta$ que le grand axe oc fait avec le rayon vecteur $c\delta$, étant double de l'angle $\alpha\gamma\beta$ compris entre la

tangente (T) et la tangente au cercle générateur du tore, le rayon vecteur $c\delta$ est égal au rayon de courbure de la section normale du tore, dont le plan passe par la tangente (T) (*Appendice* E. *art.* 3, *page* 115). Pour avoir la projection verticale φ (*fig.* 2) du centre de courbure de cette section, on prend $o\varepsilon$ (*fig.* 2) $= c\delta$ (*fig.* 3), et on mène l'horizontale $\varepsilon\varphi$, (*fig.* 2) qui contient cette projection verticale. Cette projection est aussi sur la projection verticale mp de la normale au tore menée par le point (M); la droite mp coupe la droite $\varepsilon\varphi$ au point demandé φ. La verticale $\varphi\varphi'$ et la trace AM (*fig.* 1) du meridien du tore, se rencontrent au point φ', (*fig.* 1) qui est la projection horizontale du centre de courbure dont φ (*fig.* 2) est la projection verticale. Le point (φ, φ') est le centre de courbure de la section normale au tore, dont le plan passe par la tangente (T).

Le plan vertical $G\varphi'$ (*fig.* 1) qui contient le centre de la sphère (Gg), et le centre de courbure $(\varphi'\varphi')$, ayant tourné autour de la verticale G pour venir s'appliquer sur le plan méridien GH, ou son parallèle gh, on a (*fig.* 2) g pour le centre de la sphère, et ψ l'un des points de la droite $\varepsilon\varphi$, pour le centre de courbure (φ, φ'). Le cercle décrit du point ψ comme centre avec le rayon $\psi z = o\varepsilon = c\delta$ (*fig.* 3), coupe le grand cercle de la sphère du rayon gh (*fig.* 2), et la demi-corde ωz de ces deux cercles est le rayon de courbure demandé (E, *art.* 77 *pag.* 80). Pour ramener le centre de courbure ω dans le plan méridien $G\varphi'$ (*fig.* 1), on prend la distance $\omega\omega''k$ du point ω à l'axe vertical gg' qui passe par le centre (G, g) de la sphère, et on porte cette distance (*fig.* 1) sur $G\varphi'$ de G en ω'; les points ω', ω'' sont les deux projections du centre de courbure demandé. La droite qui joint le point (ω', ω'') et le point (M) est le rayon de courbure au point (M) de la ligne d'intersection du tore et de la sphère; ce rayon a pour projections les droites $M\omega'$ (*fig.* 1) et $m\omega''$ (*fig.* 2).

34. Considérons maintenant le point (N) ou (N, n) du tore, pour

lequel le plan tangent à ce tore est de la seconde espèce, et proposons-nous de construire le cercle osculateur de la courbe d'intersection du tore et de la sphère en ce point (N).

L'horizontale nr (*fig.* 2) coupe le cercle générateur du tore au point r, par lequel on mène le rayon cr de ce cercle, qui, prolongé, rencontre l'axe aa' du tore au point s. Les rayons principaux du tore au point (N) sont évidemment cr et rs; et, comme dans le cas particulier de la figure, ces deux rayons sont égaux, l'hyperbole, lieu des rayons de courbure des sections normales du tore au point (N), devient une ligne droite $r\delta$ (*fig.* 4) dont le foyer est le point c, distant du point r de cr (*fig.* 4) $= cr$ ou rs (*fig.* 2).

La tangente (T′) au point (N) de l'intersection du tore et de la sphère coupe le plan horizontal $\omega\omega'$ (*fig.* 2) au point dont la projection horizontale est β' (*fig.* 1), et on a pour l'analogue du triangle rectangle $\alpha\beta\gamma$, contenu dans le plan tangent au tore au point (M), le triangle $\alpha''\beta'\gamma'$, dans lequel le côté $\alpha''\gamma'$ est égal à $rq' = oq$ (*fig* 2), et dont l'angle $\alpha''\gamma'\beta'$ adjacent à ce côté, est égal à l'angle de la tangente (T′) et de la tangente au cercle générateur du tore, angle qui a pour sommet, le point (N) intersection de ces deux tangentes.

Soit (*fig.* 4) $rc\delta'$ un angle double de $\alpha''\gamma'\beta'$; le côté $\delta'c$ de cet angle coupe la droite $r\delta$ au point δ, tel que $c\delta$ prolongement de $\delta'c$, est la longueur du rayon de courbure de la section normale du tore dont le plan passe par la tangente (T′). Portant cette longueur $c\delta$ de r en t (*fig.* 2) sur cr prolongé, et la distance horizontale tt' du point t à l'axe de révolution aa' du tore, sur le prolongement de la droite AN (*fig.* 1) de A en u', on détermine les deux projections u', u du centre de courbure de la section normale du tore dont le plan passe par la tangente (T′) et le point de contact (N).

Le plan vertical Gu' (*fig.* 1) ayant tourné autour de la verticale (G, gg') pour devenir parallèle au plan vertical de projection, on a sur ce plan, le centre g de la sphère et le centre de courbure u'' dont

les projections sont (u,u') *fig.* 1 et 2. Décrivant du point u'' comme centre, avec un rayon $u''z' = c\delta$ (*fig.* 4), un cercle qui coupe le grand cercle de la sphère du rayon gh, la demi-corde vz' de ces deux cercles est le rayon de courbure du point (N) de la courbe d'intersection de la sphère et du tore. Le centre de courbure v est à la distance vk' de l'axe vertical gg'; portant cette distance sur Gu' (*fig.* 1) de G en x', et menant la verticale $x'x$, qui coupe l'horizontale vk' (*fig.* 2) au point x, les points x,x' sont les deux projections du centre du cercle osculateur de la courbe d'intersection du tore et de la sphère, au point (N) de cette courbe. Le plan de ce cercle a pour trace sur le plan horizontal ww' (*fig.* 2) une droite dont la projection horizontale $y\beta'$, (*fig.* 1), passe par le point β', projection horizontale du point où la tangente (T') coupe ce plan horizontal ww.

Troisième Exemple. *Courbe d'intersection de deux surfaces annulaires, ou de deux tores.* Pl. 8, in-folio.

35. On a construit cette courbe dans le premier supplément de la Géométrie descriptive, pour trouver par l'intersection de trois surfaces annulaires, le sommet d'une pyramide triangulaire dont on connaît la base et les angles opposés aux trois côtés de cette base. Cette question a au plus seize solutions, et pour trouver les données du problême qui donnent ce *maximum* de solutions, j'ai employé un moyen qui consiste à chercher d'abord la courbe d'intersection de deux surfaces annulaires qui ont pour axes de révolution deux des trois côtés de la base de la pyramide, et à prendre pour indéterminé, le cercle générateur de la troisième surface. J'ai supposé que cette courbe d'intersection tournait autour de l'axe de révolution de la troisième surface annulaire, pour engendrer une quatrième surface. La courbe d'intersection de cette quatrième surface par le plan de la base triangulaire de la pyramide, étant composée de deux branches, on dispose du rayon du cercle générateur de la troisième

surface annulaire, pour que ce cercle qui peut prendre deux positions différentes par rapport à l'axe du tore dont il est la génératrice, coupe la courbe dans chaque position en huit points. On obtient par ce moyen seize points qui sont à-la-fois sur les trois surfaces annulaires. (*Voyez le premier supplément page* 116, *art.* 131, *et la correspondance sur l'école polytechnique, tome* 2, *page* 332).

On déduit de ces considérations la construction suivante :

(Voyez ce dessin ou épure, pl. 8.)

36. Soient (*fig.* 1, pl. 8) XYZ le triangle base d'une pyramide donnée; XFZ*f*, ZOY*o*, XGY*g*, les cercles générateurs des trois surfaces de révolution qui, par leur intersection, déterminent le sommet de la pyramide. Les deux premières surfaces qui ont pour axes les droites XZ, ZY, se coupent suivant une ligne composée de deux branches, l'une qui résulte de l'intersection des nappes de surfaces engendrées par les grands segments XFZ, ZOY et des nappes de surfaces engendrées par les petits segments X*f*Z, Z*o*Y; l'autre, qui résulte de l'intersection des nappes engendrées par un grand segment XFZ et un petit segment Z*o*Y, ou par un grand segment ZOY et un petit segment X*f*Z.

La première branche, en tournant autour de l'axe XY, engendre une nappe de la quatrième surface de révolution, dont la section par le plan du triangle XYZ, est ZACB. La section de la seconde nappe par le même plan, est ZA′C′B; ces deux sections ont pour normale commune l'axe XY, qui divise chacune d'elles en deux parties égales; elles sont coupées par les deux cercles XGY*g*, et XG′Y*g*′, en seize points, dont huit marqués des chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, appartiennent à la courbe ZABC. Les huit autres points marqués des mêmes chiffres accentués, appartiennent à la courbe ZA′B′C′. Les points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, mis deux à deux dans l'ordre suivant, 1—8, 2—7, 3—6, 4—5, sont à égales distances de l'axe XY, et sur

des droites perpendiculaires à cet axe. Il en est de même des points $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, par rapport aux points $8'$, $7'$, $6'$, $5'$.

D'où il suit que les sommets des pyramides cherchées sont situés sur huit cercles du diamètre $1-8$, $2-7$, $3-6$, $4-5$, $1'-8'$, $2'-7'$, $3'-6'$, $4'-5'$. Ces cercles appartiennent à la troisième surface de révolution, dont l'axe est XY, et qui a pour génératrice les arcs XGY, XgY. Chacun de ces cercles contient deux sommets des pyramides cherchées. En effet, considérons celui dont le diamètre est $1-8$, et qui a pour centre un point de l'axe XY. Le point 8 de la courbe ZACB provient de l'intersection de deux cercles décrits par deux points des grands segments ZOY, ZFX; donc, si l'on porte la droite Y8 sur Ya, corde de l'arc ZOY, et la droite Za sur Za', corde de l'arc ZFX, ou la droite X8 sur la corde Xa' du même arc ZFX, les trois droites Ya, Za égale à Xa', et Xa' seront les trois arêtes d'une des pyramides cherchées. Abaissant la perpendiculaire $a\alpha$ sur l'axe ZY, et la perpendiculaire $a'\alpha$, sur l'axe XZ, ces deux perpendiculaires se rencontrent en un point α du diamètre $1-8$, qui est la projection du sommet de la pyramide sur le plan de la base XYZ. Le même point α est la projection du sommet d'une seconde pyramide, symétrique par rapport à la première.

Le cercle du diamètre $1-8$ contient les sommets de deux pyramides symétriques; ces sommets se projettent en α sur le plan horizontal du triangle XYZ, et en α, (α) sur le plan vertical vv' (*fig.* 2), perpendiculaire à l'axe XY. Les quatre projections horizontales α, β, γ, δ, des sommets de pyramides qui correspondent à la courbe ZABC, forment un quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$, dont la projection verticale (*fig.* 2) est le système des deux quadrilatères $\alpha\beta\gamma\delta$, et (α) (β) (γ) (δ). Les quatre projections horizontales α', β', γ', δ', des sommets de pyramides qui correspondent à la courbe ZA'B'C', forment un quadrilatère $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$, dont la projection verticale (*fig.* 2) est le système de deux quadrilatères $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$, et (α') (β') (γ') (δ').

Cette solution fait voir que les pyramides qui ont pour bases le triangle XYZ, et pour angles opposés aux côtés de cette base, les angles déterminés par les arcs XFZ, ZOY, YGX, et leurs supplé-ments, sont au nombre de seize.

37. La courbe d'intersection de deux surfaces annulaires, et un point de cette courbe étant donnés, on déterminera le cercle oscu-lateur de la courbe par le point donné, en menant par ce point la tangente à la courbe d'intersection, et par cette tangente les sections normales des deux surfaces. On aura pour le point donné les rayons principaux des deux tores, et les angles que la tangente des sec-tions normales fait avec les tangentes aux cercles générateurs des tores. Les rayons principaux donnés de grandeur et de direction feront connaître les ellipses ou les hyperboles dont les rayons vec-teurs représentent les rayons de courbure des sections normales, et, par le théorème de Meusnier, on construira les centres et les rayons des deux sphères dont l'intersection est le cercle osculateur de-mandé (1).

---

(1) Voyez *les Eléments de Géométrie à trois dimensions*, page 82, art. 78.

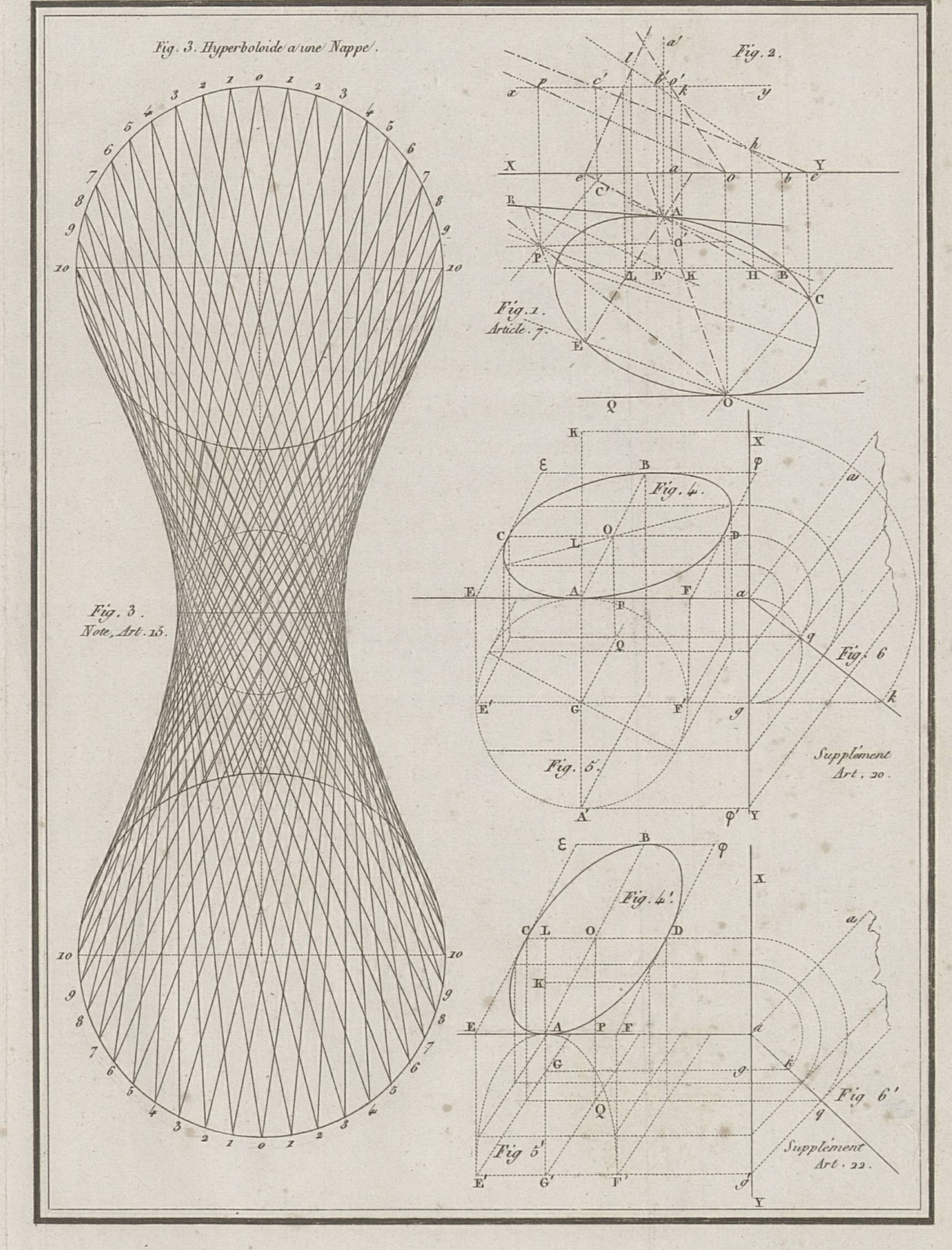
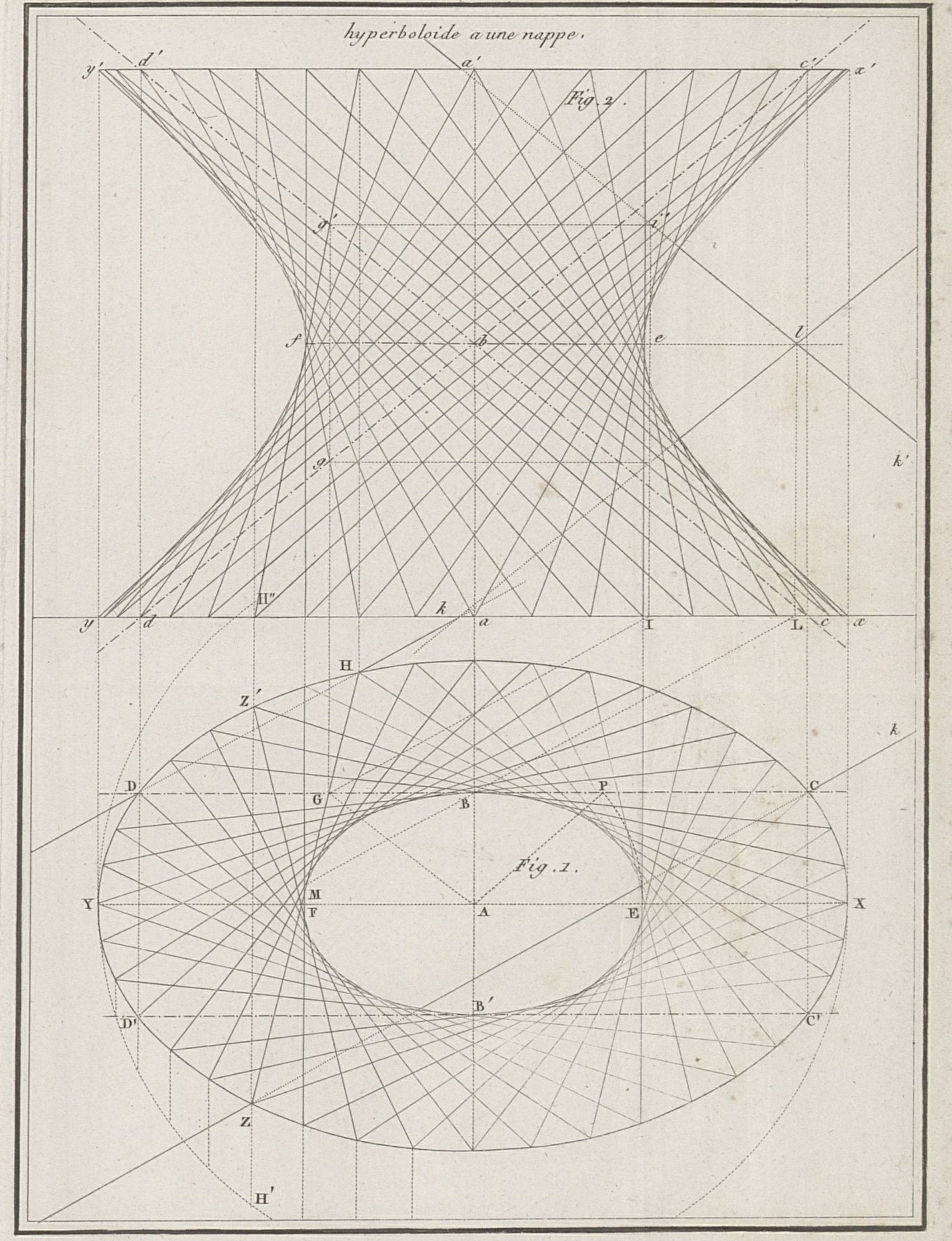
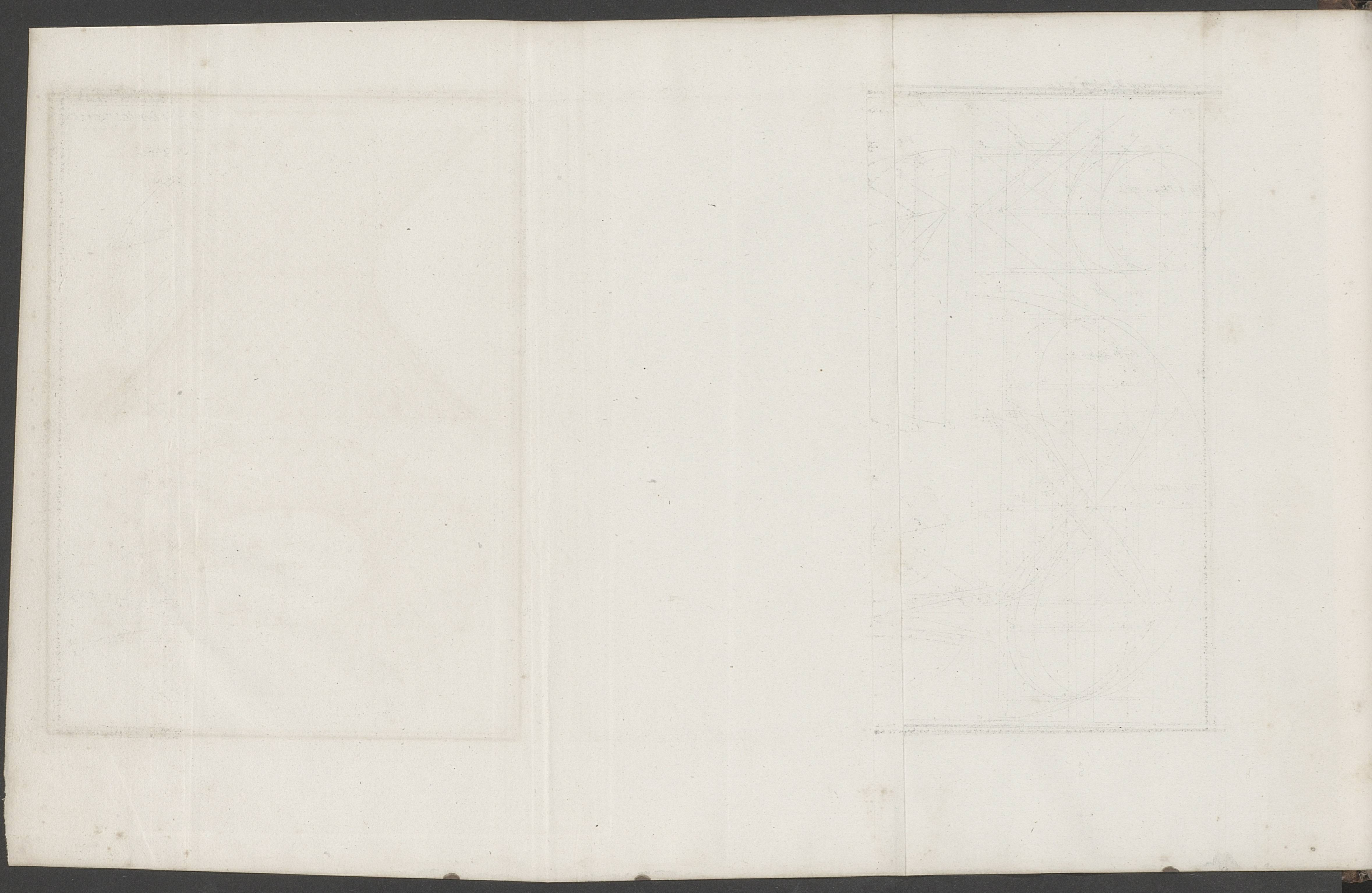

Fig. 3. Hyperboloïde a une Nappe.
Fig. 2.
Fig. 1.
Article 7.
Fig. 3.
Note, Art. 25.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6
Supplément
Art. 20.
Fig. 4'.
Fig. 5'.
Fig. 6'.
Supplément
Art. 22.

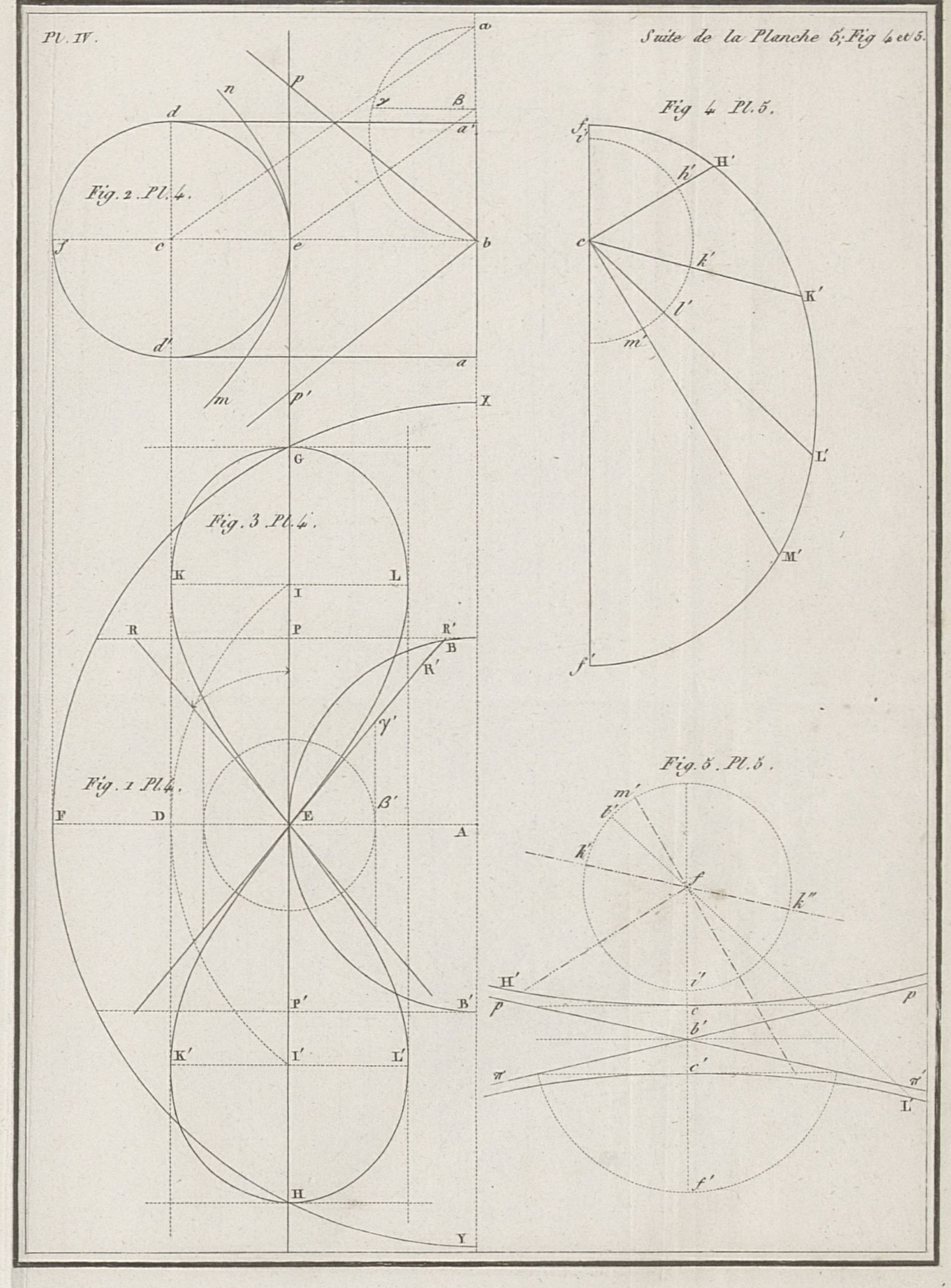
Fig. 2.

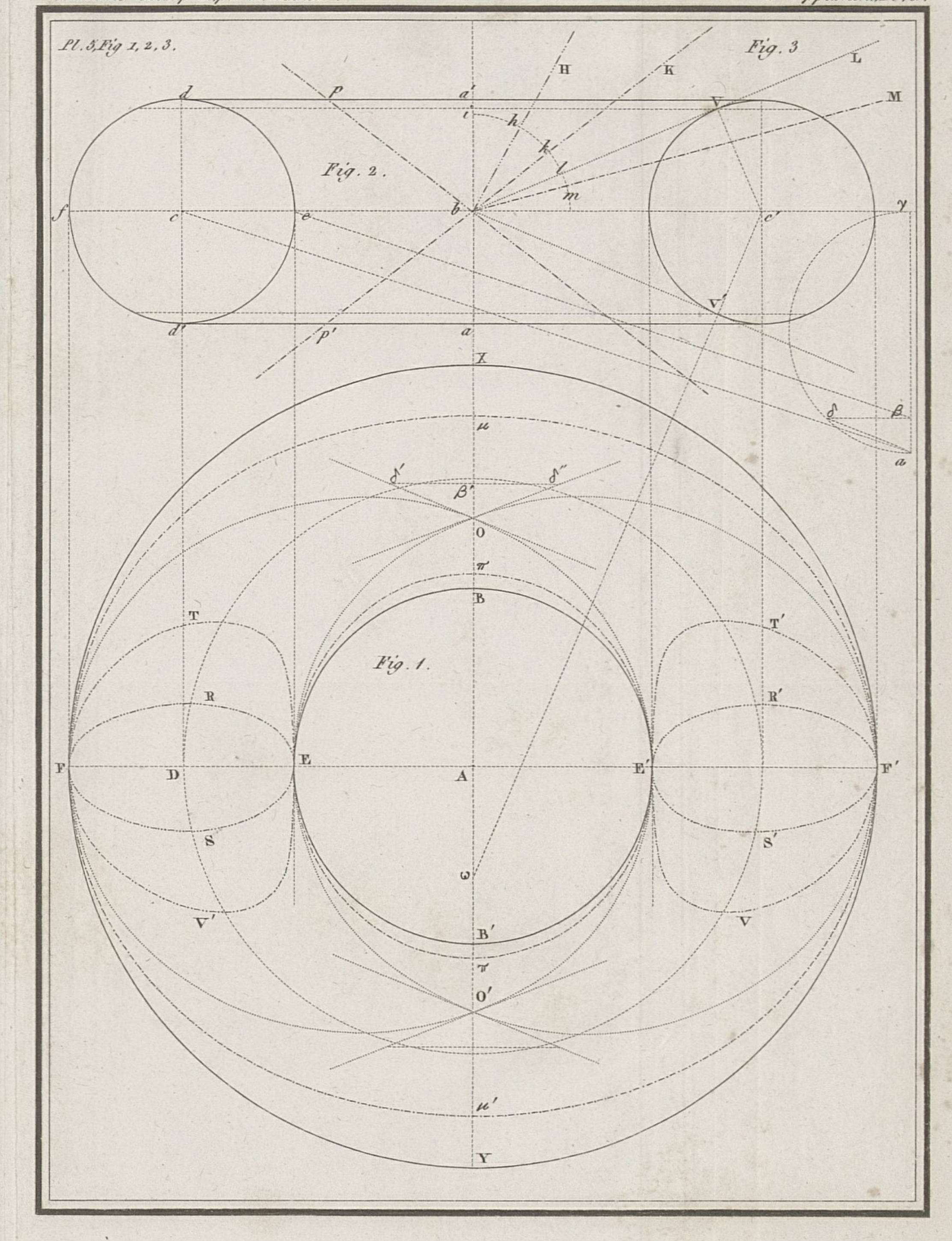
Fig. 1.

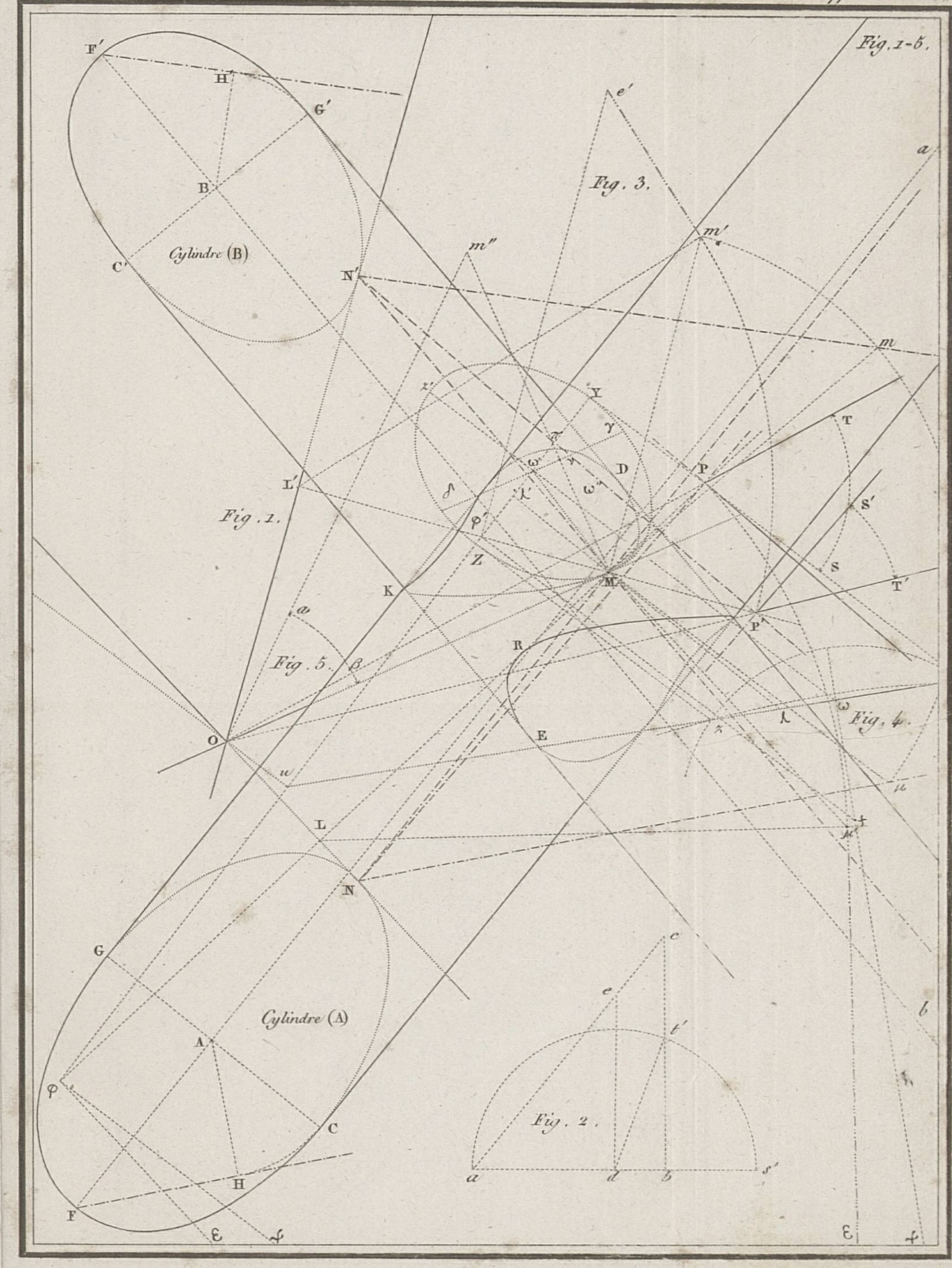


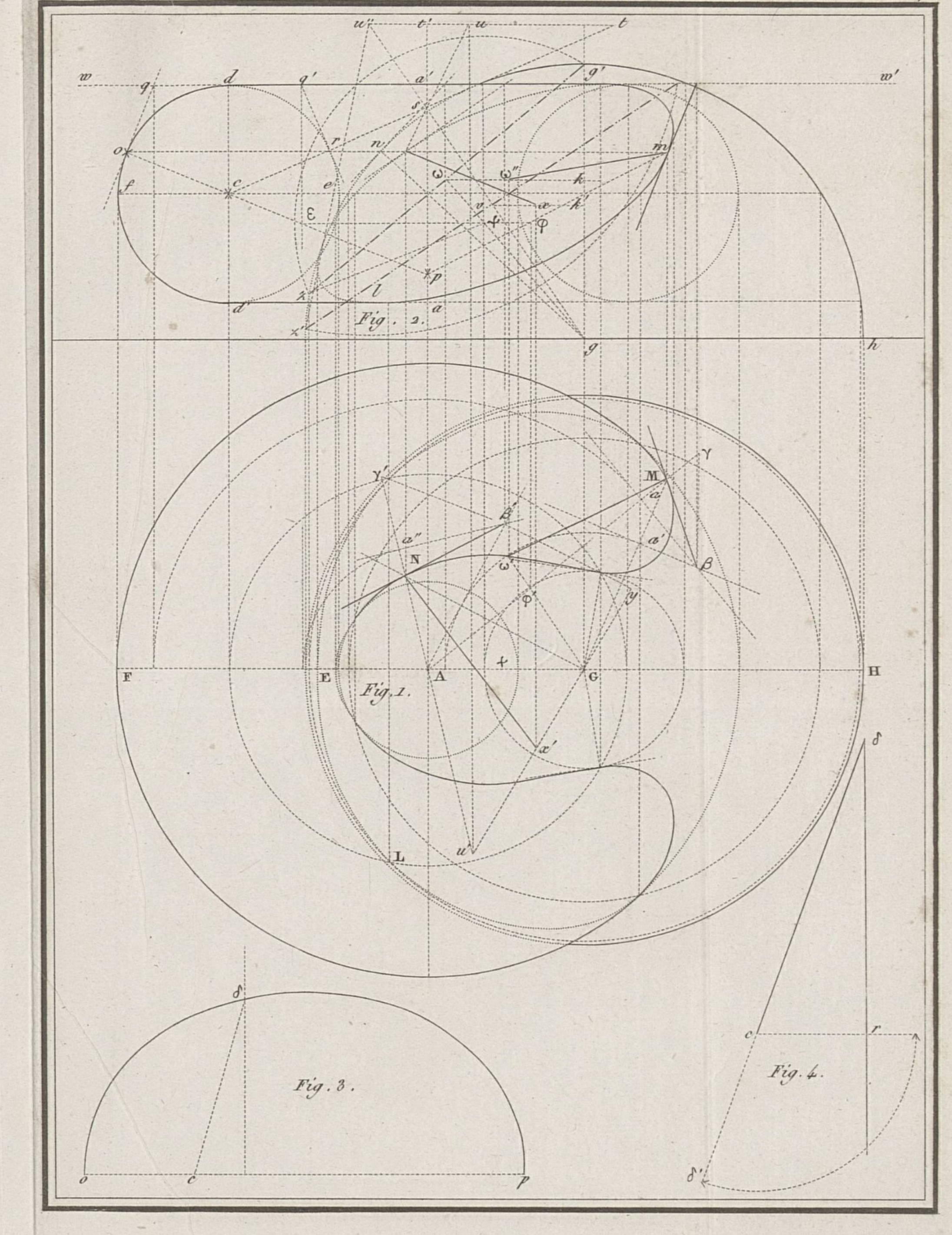

hyperboloïde a une nappe.
Fig. 2.
Fig. 1.




Pl. IV.
Suite de la Planche 5; Fig. 4 et 5.
Fig. 2. Pl. 4.
Fig. 3. Pl. 4.
Fig. 1. Pl. 4.
Fig. 4. Pl. 5.
Fig. 5. Pl. 5.


Pl. 5, Fig 1, 2, 3.
Fig. 3
Fig. 2.
Fig. 1.

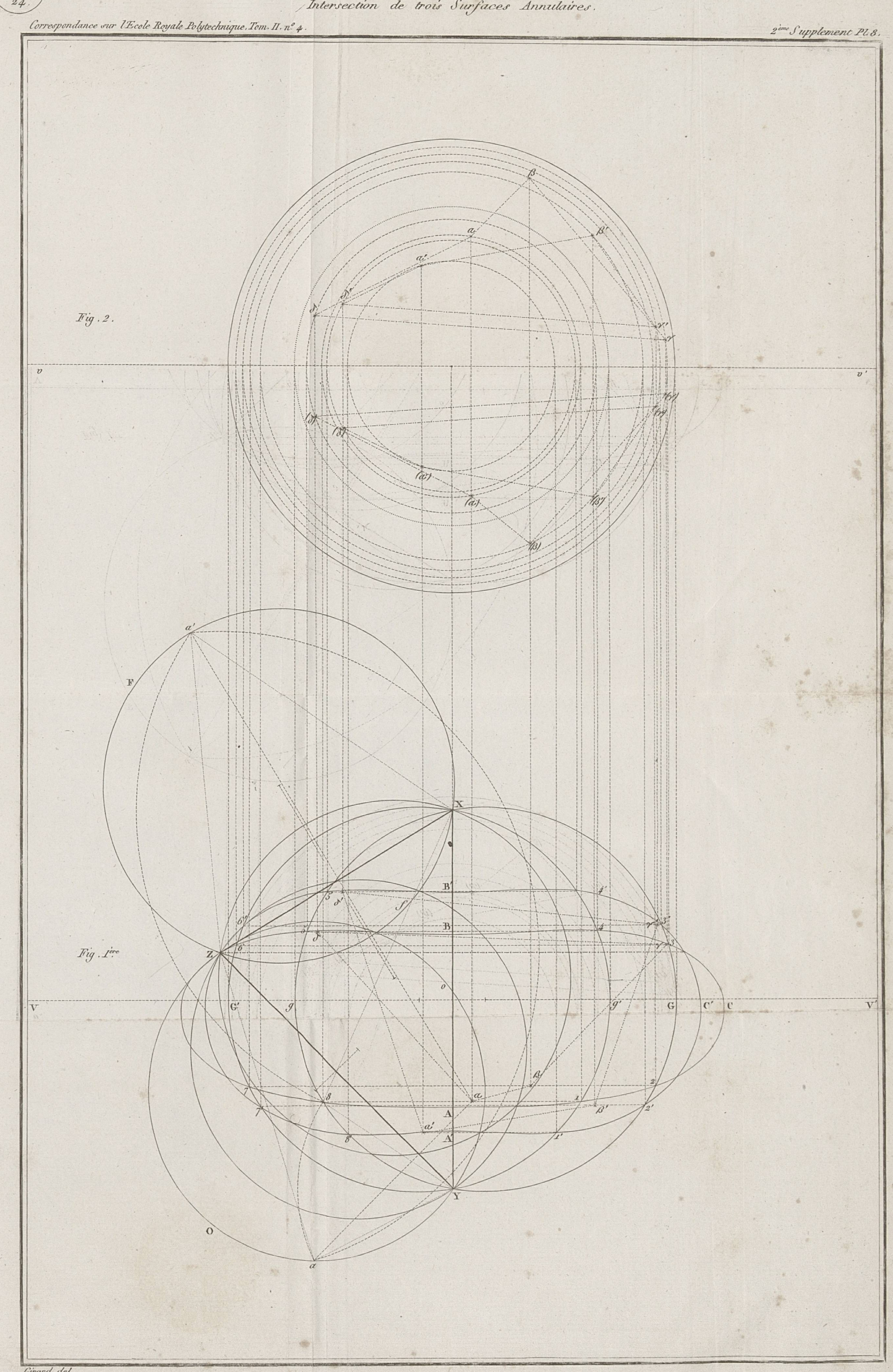

Fig. 1-5.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Cylindre (B)
Cylindre (A)


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
F
E
A
G
H
M
N
L
h
g
w
w'
o
c
p

C d. 24.

Cours de Géométrie Descriptive, Par Mr. Hachette.

Intersection de trois Surfaces Annulaires.



Girard del.

ANALYSE

GÉOMÉTRIQUE.

L'ANALYSE (1) est cette méthode, par laquelle une proposition est ramenée par un enchaînement de conséquences nécessaires, soit à une opération connue, soit à un principe admis. Elle est également applicable à la recherche de la vérité d'un *théorême*, et à la découverte de la construction propre à résoudre un *probléme*. L'analyse est une forme inverse de solution ; partant de l'hypothèse avancée comme si elle était vraie, elle remonte pas à pas jusqu'à ce qu'elle ait atteint un principe déja connu. L'inverse de cette méthode constitue la *synthèse* ou *composition*, laquelle est ordinairement employée pour exposer les éléments des sciences. L'analyse est proprement l'instrument d'invention, tandis que la synthèse est naturellement consacrée à diriger l'exposition des découvertes.

(1) Mot grec (*analusis*) dérivé d'*ana* de rechef et de *luó* dissoudre ou résoudre.

LIVRE PREMIER.

DÉFINITIONS.

1°. Dans chaque question, on appelle *données*, les *quantités* qui sont déterminées d'après le seul énoncé du problême, et celles qui peuvent être déduites des précédentes par des moyens déja connus.

2° On dit qu'un *rapport* est *donné* quand il est égal à celui de quantités données.

3° Les lignes, les points, les étendues dans une *position* fixe, sont donnés lorsqu'ils résultent de l'énoncé du problême, ou qu'ils peuvent en être déduits par des moyens déja connus.

4° Un cercle est *donné* de *position* et de grandeur, quand son centre et son rayon sont donnés.

5° Une figure rectiligne est dite *donnée d'espèce*, lorsqu'elle est semblable à une figure donnée.

PROPOSITION PREMIÈRE.

PROBLÊME.

Par deux points donnés, mener des obliques à une droite connue qui soient également inclinées sur elle.

Soient A, B (*fig.* 1, pl. 1) les deux points donnés, et CD une droite donnée de position; on propose de tirer AG et BG de manière que les angles AGC et BGE soient égaux.

ANALYSE.

Par B, l'un des points donnés, abaissez sur CD la perpendiculaire

BE, et prolongez-là jusqu'à ce qu'elle rencontre en F, AG ou son prolongement. L'angle BGE étant égal à AGC d'après l'hypothèse, il est aussi égal à FGE; l'angle droit BEG = FEG, et le côté GE est commun aux triangles GBE et GFE; donc ces triangles sont égaux, d'où il résulte que le côté BE est égal à FE; mais la perpendiculaire BE est donnée, en conséquence FE est connu tant en position qu'en grandeur; ce qui détermine le point F et aussi le point G qui est l'intersection de AF avec CD.

SYNTHÈSE.

Abaissez la perpendiculaire BE, et prolongez-la d'une égale quantité au-dessous de CD; tirez AF qui rencontre CD en G; AG et BG sont les lignes cherchées.

Car les triangles GBE et GFE ayant un angle égal BEG = FEG, compris entre deux côtés égaux, puisque BE = FE et que GE est commun, sont égaux; ce qui prouve l'égalité des angles BGE et AGC.

PROPOSITION II.

PROBLÊME.

Par un point donné, mener une droite qui fasse des angles égaux avec deux droites données de position.

Soit A (*fig.* 2) le point donné, et CB, GD les lignes droites qui sont données de position.

ANALYSE.

Menez CH parallèle à FE, et prolongez CD. L'angle extérieur GCH est égal à CFE, et ECH est égal à son alterne CEF; mais l'angle CFE est égal à CEF, donc GCH est égal à ECH; conséquemment l'angle GCE est divisé en deux parties égales par la ligne

droite CH. Or CH est donné de position, donc la parallèle EF est également connue.

SYNTHÈSE.

Coupez l'angle connu GCB en deux parties égales par la ligne droite CH, et par le point donné A, menez à cette droite la parallèle EF; l'angle CEF est égal à CFE. Car ces deux angles sont respectivement égaux, l'un à l'angle interne ECH, l'autre à l'angle correspondant GCH; ils sont par conséquent égaux entre eux.

PROPOSITION III.

PROBLÊME.

Par un point donné, mener une droite telle que les segmens interceptés par les perpendiculaires abaissées sur elle de deux points donnés, soient égaux.

Les points A, B et C étant donnés (*fig.* 3), on propose de tirer une ligne droite FCE, de manière que les parties CF et CE, déterminées par les perpendiculaires AF et BE, soient égales.

ANALYSE.

Prolongez AC jusqu'à la rencontre de BE en D. Les triangles rectangles AFC et DEC, ayant l'angle ACF égal à DCE et le côté CF égal à CE, sont égaux; il en résulte que le côté CA est égal à CD. Mais CA est évidemment donné; donc CD et le point D sont connus; ainsi BD est donné, et il en est de même de la perpendiculaire CE.

SYNTHÈSE.

Prolongez AC d'une égale quantité jusqu'en D, tirez BD, menez une parallèle AF à la ligne BD et une perpendiculaire CE à la même ligne;

FCE est la ligne cherchée. Car les triangles FAC et EDC ayant les angles ACF, AFC respectivement égaux à DCE, DEC, et le côté AC égal à CD, il s'ensuit qu'ils sont égaux et que CF = CE.

PROPOSITION IV.

PROBLÊME.

Partager un triangle en deux parties équivalentes, par une ligne droite menée d'un point donné sur un des côtés.

Soit proposé de tirer par le point D, la droite DF qui partage en deux portions équivalentes le triangle ABC.

ANALYSE.

Prenez le milieu E de AC (*fig.* 4), tirez EB, EF et BD. Le triangle ABE est équivalent à EBC, et il est par conséquent la moitié de ABC; ainsi d'après l'énoncé, ABE doit être équivalent à AFD; si on retranche de chacun de ces triangles la partie commune AFE, il restera deux triangles équivalents EFB et EFD. Puisque ces deux triangles ont la même base, il faut qu'ils aient la même hauteur, c'est-à-dire que FE soit parallèle à BD. Mais les points B et D étant donnés, la droite BD est donnée de position, d'où il suit que EF est aussi connu.

SYNTHÈSE.

Ayant pris le milieu de AC en E et tiré BD, menez la parallèle EF à cette droite, qui rencontre AB en F; la ligne DF divise le triangle en deux portions équivalentes.

En effet, tirez BE. Puisque BD est parallèle à FE, le triangle EFB est équivalent à EFD; et si l'on ajoute AFE à chacun de ces deux triangles, les triangles ainsi formés AFD et ABE sont égaux : donc le premier est la moitié de ABC puisque le second l'est.

PROPOSITION V.

PROBLÊME.

Trouver un point dans l'intérieur d'un triangle, par lequel les droites menées aux trois sommets, divisent le triangle en trois triangles équivalens (1).

Soit F (*fig.* 5) le point cherché, duquel partent les lignes FA, FB et FC qui partagent en trois portions équivalentes le triangle donné ABC.

ANALYSE.

Menez FD, FE parallèles aux côtés BA, BC, et tirez BD, BE. FD étant parallèle à AB, le triangle ABF est équivalent à ABD, lequel est ainsi le tiers de ABC; par la même raison, le triangle BEC qui est équivalent à BFC, est pareillement le tiers de ABC. C'est pourquoi les bases AD et EC sont chacune le tiers du côté AC, et par conséquent les points de division D et E sont donnés. Les parallèles DF et EF sont donc connues, et il en est de même de leur point de concours F.

Mais le point F peut être déterminé autrement. En effet, prolongez AF et CF en G et en H. Le triangle DFE est évidemment semblable à ABC, d'où il résulte AC:AB::DE:DF. Mais AC = 3DE, donc AB = 3DF. De plus, à cause que AH et DF sont parallèles, on a AC:AH::DC:DF, ou, ce qui revient au même, 2AC:2AH::3DC:3DF; mais 2AC = 6AD = 3DC et 2AH = 3DF = AB. Ainsi le

(1) Le problème analogue dans la Géométrie à trois dimensions, consiste à trouver, dans l'intérieur d'un tétraèdre, un point tel que les tétraèdres qui ont pour sommet commun ce point, et pour bases les quatre faces du tétraèdre, soient équivalentes; ce point est le centre de gravité du tétraèdre.

(*Note du traducteur*, M. COMTE.)

point H est le milieu de AB, et, par la même raison, G est le milieu de BC. Ces deux points étant donc connus, l'intersection F des lignes CH et AG, est également déterminée.

SYNTHÈSE.

Coupez AB et BC par leurs milieux en H et en G, tirez CH et AG, et, par leur point d'intersection, menez FA, FB et FC; vous aurez ainsi divisé le triangle ABC en trois parties équivalentes. En effet, abaissez par les points A et B les perpendiculaires AI et BL. Les triangles HAI et HBL sont égaux, puisque AHI=BHL, que AIH=BLH, et que le côté AH est égal à BH; AI est donc égal à BL. Les triangles AFC et BFC reposent sur la même base CF, et ayant des hauteurs égales AI et BL, sont équivalents. Par le même raisonnement, on démontre que les triangles AFC et AFB sont équivalents. Le triangle entier ABC est donc partagé en trois triangles égaux en surface et qui ont leur sommet commun au point F.

PROPOSITION VI.

PROBLÊME.

Partagez un triangle en trois parties équivalentes par des lignes droites menées d'un point donné dans l'intérieur du triangle.

Soit ABC (*fig.* 6) un triangle qu'on se propose de diviser en trois aires équivalentes, par les droites DB, DG et DH, tirées du point D.

ANALYSE.

Tirez BG, menez la parallèle DE à cette ligne, et joignez B et E. Le triangle BDG est équivalent à BEG, et conséquemment le quadrilatère ABDG équivaut au triangle ABE, qui est ainsi le tiers de ABC. Il en résulte que la base AE est le tiers de AC, et par conséquent que le point E est connu; la parallèle BG à DE est donc déter-

minée, et pareillement le point G ainsi que DG. Par un raisonnement semblable, on voit en menant BH et sa parallèle DF, tirant DH, que la ligne BH est également déterminée.

SYNTHÈSE.

Partagez la base AC en trois parties égales, et par les points de division E, F, menez les droites DE, DF; menez à ces lignes les parallèles BG, BH; tirez les droites DB, DG, DH; elles divisent le triangle ABC en trois portions équivalentes.

Car DE étant parallèle à BG, le triangle BDG est équivalent à BEG, et par conséquent le quadrilatère ABDG est équivalent au triangle ABE. Par la même raison, le quadrilatère BDHC équivaut au triangle BFC; donc les triangles restants GDH et BFE sont équivalents. Mais les triangles ABE, BEF, FBC, ayant des bases égales et leur sommet commun, ont la même aire; donc les espaces ABDG, GDH et BDHC, sont chacun le tiers du triangle donné ABC.

PROPOSITION VII.

PROBLÊME.

Inscrire un quarré dans un triangle.

Soit le triangle ABC (*fig.* 7) dans lequel on propose d'inscrire un quarré IGFH.

ANALYSE.

Tirez AF, et prolongez cette droite jusqu'à la rencontre en E de la parallèle BE à AC; abaissez de plus les perpendiculaires BD et EK.

Puisque EB est parallèle à AC ou à FG, on a la proportion, AF:AE::FG:EB; et de plus la perpendiculaire EK étant parallèle à FH, on a aussi AF:AE::FH:EK. Il résulte de ces deux proportions que FG:EB::FH:EK; mais FG=FH, donc EB=EK. Or, la ligne EK est connue puisque elle est égale à BD qui est la hau-

teur du triangle donné; donc EB est aussi déterminée tant en position qu'en grandeur; d'où il résulte que le point E est connu, qu'il en est de même de l'intersection de AE avec BC, et conséquemment de la parallèle FG et de la perpendiculaire FH; le quarré FGIH est donc complettement déterminé.

SYNTHÈSE.

Menez par le point B une parallèle BE à la droite AC, et une perpendiculaire BD; prenez BE égal à BD, tirez la ligne AE qui coupe BC en F, et achevez le rectangle IGFH.

Puisque BE et EK sont respectivement parallèles à GF et à FH, AE:AF::BE:GF, et AE:AF::EK:FH; d'où il résulte que BE:GF ::EK:FH. Mais BE est égal à EK par construction; donc GF=FH. Il est évident par-là que le rectangle IGFH est un quarré.

PROPOSITION VIII.

PROBLÊME.

Par un point donné, mener une droite telle que les parties de cette droite, terminées à deux lignes données, soient entre elles dans un rapport donné.

Soit A (*fig.* 8) le point donné, et BC, BD les deux droites données; on propose de tirer EAF de manière que EA soit à AF comme M est à N.

ANALYSE.

Si vous menez par le point A la droite AG parallèle à BC, cette droite rencontrera BD en un point G qui est évidemment donné. Les lignes FE, FB sont coupées en parties proportionnelles par les parallèles BE, GA, et par conséquent EA:AF::BG:GF; le rapport de EA à AF étant donné, il en est ainsi de celui de BG à GF. Or BG est connu, GF l'est donc aussi, d'où il résulte que le point F et la ligne EAF sont déterminés.

SYNTHÈSE.

Menez AG parallèle à BC, déterminez GF de manière que BG:GF ::M:N, et tirez FAE; cette droite est la ligne cherchée.

Car BE et AG étant parallèles, on a la proportion EA:AF::BG:GF; mais BG:GF::M:N, donc EA:AF::M:N.

PROPOSITION IX.

PROBLÊME.

Par un point donné, mener une droite qui soit divisée dans un rapport donné par la circonférence d'un cercle donné.

Soit A (*fig.* 9) le point donné, et BDCE le cercle donné; il est question de mener BC de manière que BA soit à AC comme M est à N.

ANALYSE.

Tirez le diamètre DAE, les droites DB, CE, et menez CF parallèle à DB. Puisque le point A et le centre du cercle sont donnés, le diamètre DE est connu de position, ainsi que ses extrémités D et E. Mais DB étant parallèle à CF, BA:AC::DA:AF, d'où il suit que le rapport de DA à AF est connu, et comme DA est donné, il en est de même de AF. De plus, en vertu d'une propriété très-connue du cercle BA × AC = AD × AE, c'est-à-dire que AE:AC::BA:DA; mais BA:DA::AC:AF, donc AE:AC::AC:AF. Donc AC s'obtient en prenant une moyenne proportionnelle entre AF et AE; ainsi le point C est connu, et par conséquent la droite BC est déterminée complettement.

SYNTHÈSE.

Après avoir tiré le diamètre DE, prenez AF de sorte que DA:AF ::M:N, cherchez ensuite une moyenne proportionnelle AG entre

AF et AE, et déterminez le point C de manière que AC soit égale à cette moyenne proportionnelle; BAC est la ligne cherchée.

Pour le prouver, menez les droites DB, CF et CE. Puisque le produit de BA par AC est égal à celui de DA par AE, il s'ensuit que AE:AC::BA:DA; mais par construction, AE:AC::AC:AF, donc AC:AF::BA:DA, d'où il résulte que AC:BA::AF:DA, c'est-à-dire::M:N.

PROPOSITION X.

PROBLÊME.

Par deux points donnés sur la circonférence d'un cercle, mener à un autre point de cette circonférence, deux droites qui soient entre elles dans un rapport donné.

On propose de mener par les points A et B (*fig.* 10) les droites AC et BC de manière qu'elles aient un rapport donné.

ANALYSE.

Menez CE qui divise en deux parties égales l'angle ACB. Vous aurez la proportion (1) AC:CB::AD:DB, et par conséquent le rapport de AD à BD est donné, ce qui détermine le point D. Mais, puisque l'angle ACE est égal à BCE, l'arc AE est égal à l'arc EB; ainsi le point E s'obtient en prenant le milieu de l'arc AEB. Les points D et E étant déterminés, la droite EDC est connue; il en est donc de même du point C, et des cordes AC et BC.

SYNTHÈSE.

Coupez l'arc AEB en deux parties égales au point E, divisez au point D la ligne AB en deux portions qui soient entre elles dans le rapport donné, menez la ligne DE, et prolongez-la au-dessus de AB jusqu'à la rencontre de la circonférence en C; les cordes AC et BC

(1) Prolongez AC de CF=CB; à cause de BF parallèle à CD, on a la proportion AC:CF=CB::AD:DB.

sont dans le rapport donné. Car, puisque l'arc AE est égal à BE, l'angle ACD est égal à BCD, et par conséquent le rapport de AC à BC est le même que celui de AD à BD, c'est-à-dire qu'il est égal au rapport donné.

PROPOSITION XI.

PROBLÈME.

Par un point donné, mener à un cercle une sécante telle que le rectangle de la partie extérieure et de la partie comprise dans le cercle, soit équivalent à une aire donnée.

Soit proposé de mener par le point A (*fig.* 11) la droite ABC, de manière que le rectangle de AB et BC équivaille à un espace donné.

ANALYSE.

Par le centre O menez AF, et cherchez une longueur AE qui forme avec AD un rectangle équivalent à l'aire donnée. Puisque AB × AC = AD × AF, et que, par construction, AB × BC = AD × AE, il s'ensuit que AD:AB::AC:AF::BC:AE. On déduit de cette proportion que AD:AB::AC—BC, c'est-à-dire AB:AF—AE, c'est-à-dire EF. Donc AB est une moyenne proportionnelle entre AD et EF; mais AE étant donné, EF l'est aussi, et par conséquent AB est connu tant en grandeur qu'en position.

SYNTHÈSE.

Menez AF par le centre du cercle, prenez AE de sorte que le rectangle AD × AE soit équivalent à l'espace donné; cherchez une moyenne proportionnelle entre AD et EF, et portez-la depuis A sur la circonférence jusqu'en B, le rectangle AB × BC équivaut à l'aire donnée.

Car AD:AB::AB:EF, et AD:AB::AC:AF; d'où il résulte que AD:AB::AC—AB ou BC:AF—EF ou AE, par conséquent AD × AE est équivalent au rectangle AB × BC.

PROPOSITION XII.

PROBLÊME.

Par deux points donnés, faire passer un cercle qui coupe par le milieu la circonférence d'un cercle donné.

Soient A et B deux points (*fig.* 12) par lesquels il faut conduire un cercle ADGEB qui divise en deux parties égales la circonférence du cercle HDFE.

ANALYSE.

Soient D et E les points d'intersection des deux cercles. Puisque DFE est, par hypothèse, une demi-circonférence, DE est un diamètre sur lequel doit par conséquent se trouver le centre C. Menez la droite AC, et prolongez-la jusqu'en F. DC étant égal à CE, il est évident que $AC \times CG = \overline{CD}^2 = HC \times CF$; mais le rectangle HC. CF est donné, donc il en est de même du rectangle AC. CG; et comme AC est connu, CG l'est aussi, et le point G est déterminé. Maintenant que l'on connaît les trois points A, B et G, il est facile de décrire le cercle AGB.

SYNTHÈSE.

Par le point C, centre du cercle donné, menez la droite ACF, et prenez sur cette ligne un point G tel que AC:HC::FC ou HC:CG; faites passer un cercle AGB par les trois points A, B et G; il divisera en deux parties égales la circonférence HDFE.

En effet, par un des points d'intersection, menez le diamètre DCI, et prolongez-le jusqu'à la rencontre du cercle AGB en K. Puisque AC:HC::HC:CG, le quarré de HC est équivalent au rectangle de AC. CG; mais $\overline{HC}^2 = DC \times CI$, et $AC \times CG = DC \times CK$; donc $DC \times CI = DC \times CK$, ce qui prouve que CI est égal à CK, c'est-à-dire que les points I et K se confondent, et que le cercle AGB passe par les extrémités du diamètre du cercle HDFE.

PROPOSITION XIII.

PROBLÊME.

Couper une droite donnée en deux parties telles que le quarré construit sur la première soit équivalent au rectangle construit avec la seconde et avec une autre ligne donnée.

Soit AB (*fig.* 13) une droite de longueur donnée sur laquelle on propose de déterminer un segment dont le quarré soit équivalent au rectangle construit sur le reste de la droite et sur la ligne donnée C.

ANALYSE.

Prolongez BA en AD d'une quantité égale à C, et sur DB comme diamètre, décrivez une demi-conférence, et élevez la perpendiculaire AF. Puisque $\overline{AG}^2 = C \times GB$, il s'ensuit que $DA:AG::AG:GB$; d'où $DA:AG::DG:AB$; par conséquent $DA \times AB = AG \times DG$; mais par une des propriétés principales du cercle, $DA \times AB = \overline{AF}^2$, donc $AG \times DG = \overline{AF}^2$. Il résulte de-là que AF est égal à une tangente menée par G au demi-cercle qui aurait DA pour diamètre. Prenez le milieu de DA en E, et tirez EF; comme $AG \times DG = \overline{AF}^2$, si vous ajoutez $\overline{EA}^2$ aux deux membres de cette équation, vous trouverez que $AG \times DG + \overline{AE}^2$, c'est-à-dire $\overline{EG}^2$ (1), est égal à $\overline{AF}^2 + \overline{EA}^2$, c'est-à-dire $\overline{EF}^2$; donc EG est égal à EF, et par conséquent le point G est déterminé.

SYNTHÈSE.

Après avoir prolongé AB d'une quantité AD égale à C, et décrit sur BD un demi-cercle, élevez la perpendiculaire AF; joignez le point E milieu de AD avec le point F, et prenez EG égal à EF; le quarré du segment AG ainsi déterminé sur AB, équivaut au rectangle de GB et de la ligne donnée C.

---

(1) $AG = EG - AE$; $DG = EG + AE$; $AG \times DG = \overline{EG}^2 - \overline{AE}^2$.

En effet, le triangle EFA étant rectangle $\overline{EF}^2 = \overline{EA}^2 + \overline{AF}^2$, donc $\overline{AF}^2 = \overline{EF}^2 - \overline{EA}^2 = \overline{EG}^2 - \overline{EA}^2 = (EG+EA)(EG-EA) = DG \times AG$. Mais d'un autre côté $\overline{AF}^2 = DA \times AB$, donc $DA \times AB = DG \times AG$, d'où il suit que $AG:AB::DA:DG$. Or on déduit de cette proportion que $AB - AG$, ou $GB:AG::DG-DA$, ou $AG:DA$, donc $\overline{AG}^2 = GB \times DA = GB \times C$.

Coroll. On peut remarquer ici que si la ligne donnée C est égale à AB, alors $\overline{AG}^2 = AB \times BG$, c'est-à-dire que la droite AB est divisée en moyenne et extrême raison au point C. La construction alors se confond évidemment avec celle qui est exposée dans les éléments (1), laquelle n'est qu'un cas particulier de la construction qui vient de nous occuper.

PROPOSITION XIV.

PROBLÊME. *Fig.* 14 et 14 bis.

Partager une ligne donnée en deux parties qui soient entre elles en raison sous-doublée (2) de deux autres parties aussi données de la même ligne.

Soit proposé de diviser la droite AB (*fig.* 14), de sorte que les segments AD, BD soient en raison sous-doublée des segments donnés AC, BC.

PREMIER CAS. *La somme des deux segments donnés est égale à la ligne donnée.*

Le point de division C, commun aux deux segments, est entre A et B.

ANALYSE.

Sur AB (*fig.* 14) décrivez une demi-circonférence, élevez la perpendiculaire CE, et menez les droites AE, BE et ED ou ED′. Puis-

(1) Voyez la Géométrie de M. Legendre, 10e édition, livre 3, prob. 4, pag. 96, ou celle de M. Lacroix, 10e édition, pag. 83, §. 132.

(2) Deux quantités sont en raison sous-doublée de deux autres lorsque le rapport de ces dernières est égal au rapport des quarrés des premières.

que AEB est un angle droit, le rapport de AE à BE est sous-double du rapport de AC à BC, et par conséquent AE:BE::AD:BD ou AD′:BD′. Cette proportion fait voir (*note* (1), *page* 43), que l'angle AEB ou son supplément AEF, est coupé en deux parties égales par la ligne ED ou ED′. Mais la perpendiculaire et le demi-cercle sont donnés; donc le sommet E, la ligne droite ED ou ED′, et les points de division D et D′, sont également déterminés.

SYNTHÈSE.

Ayant décrit sur AB une demi-circonférence, élevez la perpendiculaire CE; menez EA, EB, et divisez en deux parties égales l'angle AEB par la droite ED ou son supplément AEF par la droite ED′; les segments intérieurs AD, DB, ou les segments extérieurs AD′, D′B, sont en raison sous-doublée de AC à CB.

Car d'après la construction, AE:BE::AD:DB ou AD′:BD′; mais le triangle AEB étant rectangle, AE est à BE en rapport sous-doublé de AC à BC, donc il en est de même du rapport AD:BD ou AD′:D′B.

DEUXIÈME CAS. *La différence des deux segments donnés est égale à la ligne donnée.*

Le point de division C est sur le prolongement de la droite donnée AB.

ANALYSE.

Sur AB (*fig.* 14 bis) décrivez une demi-circonférence, menez la tangente CE, et tirez les droites AE, BE et ED ou ED′. Les triangles ACE et ECB sont semblables, car ils ont un angle commun ECB, et de plus les angles CEA, CBE sont égaux comme ayant tous deux pour mesure la moitié de l'arc AE; il suit de-là que AC:CE::CE:BC; or puisque CE est une tangente, $\overline{CE}^2 = CB \times CA$, donc $\overline{AC}^2:\overline{CE}^2::AC:BC$. En combinant cette proportion avec la précédente, il en résulte évidemment que CE est à BC en raison sous-doublée de AC à BC, ou, $\overline{CE}^2:\overline{BC}^2::AC:BC$. Mais dans les mêmes triangles semblables,

AE:BE::CE:BC; donc AE:BE::$\sqrt{AC}$:$\sqrt{BC}$::AD:BD, ou::AD′:BD′, ainsi l'angle AEB est coupé (*voyez note* (1) *pag.* 43) en deux parties égales par ED, ou son supplément AEF l'est par ED′.

SYNTHÈSE.

Décrivez sur AB une demi-circonférence, menez-lui la tangente CE, et tirez les droites AE, BE; divisez ensuite en deux parties égales l'angle AEB ou son supplément par ED ou ED′; les segments intérieurs AD, BD, ou les segments extérieurs AD′, BD′, sont en raison sous-doublée du rapport de AC à BC.

En effet, l'angle CEA étant égal à CBE, et BCE étant commun aux deux triangles ACE et BCE, ces deux triangles sont semblables, et AC:CE::CE:BC; donc le rapport de CE à BC est sous-double du rapport de AC à BC. De plus, par la similitude des mêmes triangles, AE:BE::CE:BC, et par conséquent AE est à BE en raison sous-doublée de AC à BC. Mais AE:BE::AD:BD, ou AD′:BD′; donc le rapport de AD à BD ou de AD′ à BD′, est sous-double de celui de AC à BC.

Corollaire. Dans ce second cas, l'angle CDE étant égal à la somme des deux angles DEB, DBE, ou, ce qui revient au même, à la somme des angles DEA, AEC, il s'ensuit que l'angle CDE est égal à l'angle CED, et que le triangle CDE est isocèle. De plus, en vertu de l'hypothèse, D′EF=D′EA=D′EC+AEC; mais d'un autre côté D′EF=CD′E+D′BE=CD′E+AEC; en comparant ces deux résultats, il est clair que les angles CD′E et D′EC sont égaux, et que le triangle D′CE est aussi isocèle. Donc CE=CD=CD′; ainsi, sans qu'il soit nécessaire de diviser l'angle AEB ou AEF en deux parties égales, on peut trouver le point D ou D′ au moyen de la tangente CE, qui est une moyenne proportionnelle entre les segments AC, BC.

PROPOSITION XV.

PROBLÊME.

Trouver un point sur le diamètre d'un cercle, tel qu'en menant

par ce point, sous une inclinaison donnée, une droite terminée à la circonférence, le quarré de cette droite soit dans un rapport donné avec le rectangle des deux segments du diamètre.

Soit proposé, *fig*. 15, de mener DE faisant un angle donné avec DB de telle manière que le quarré de DE ait un rapport donné avec le rectangle AD, BD.

ANALYSE.

Prenez EG = FD, menez CF, le rayon CGH, et la droite AH; prolongez cette dernière jusqu'à la rencontre de CE en I. Comme CE est égal à CF, l'angle CEF est égal à CFE. De l'égalité de ces deux angles et de l'égalité respective des côtés CE, EG aux côtés CF, FD, il résulte que les triangles CDF et CGE sont égaux, et conséquemment que l'angle ECG est égal à l'angle FCD; donc l'arc HE est égal a AF, et par conséquent AH est parallèle à DE. L'angle BDE étant donné, BAH l'est donc aussi, et la corde AH est connue. De plus le rectangle AD. DB étant égal au rectangle FD. FE, il l'est pareillement au rectangle DE. EG; c'est pourquoi $\overline{DE}^2$ est à DE × EG, ou DE est à EG dans le rapport donné; mais DE:EG::AI:IH, donc AI est à IH dans un rapport connu, et il en est de même de AH à l'égard de HI. Puisque AH est donné, IH l'est donc aussi, et par conséquent le point I et IC, le point E et DE sont déterminés.

SYNTHÈSE.

Menez AH inclinée sur AB d'une quantité égale à l'angle donné, prolongez cette droite d'une quantité AI qui soit avec IH dans le rapport donné; tirez IC, menez ED parallèle à IA; D est le point cherché.

Car, puisque AI:IH::DE:EG, DE est à EG dans le rapport donné, et par conséquent $\overline{DE}^2$ est à DE × EG dans le même rapport. Mais FE étant parallèle à AH, l'arc HE est égal à l'arc AF, l'angle HCE est donc égal à ACF, ainsi les triangles GCE et CDF sont égaux, puisque le côté CE est égal à CF, et que les angles ECG et

CEG sont respectivement égaux aux angles FCD et CFD; donc GE $=$ FD, et par conséquent $DE \times EG = DE \times FD = AD \times DB$, donc $\overline{DE}^2$ est à $AD \times DB$ dans le rapport donné.

PROPOSITION XVI.

PROBLÊME. *Fig.* 16 et 16 (bis).

Par deux points donnés, mener à un point de la circonférence d'un cercle donné, deux droites telles que la corde de l'arc qu'elles interceptent soit parallèle à la ligne qui joint les deux points donnés.

Par les points A, B, on propose de mener les droites AC, BC qui coupent la circonférence donnée en D et E, de manière que DE soit parallèle à AB.

ANALYSE.

Menez la tangente DF qui rencontre AB en F. L'angle FDE est égal à l'angle ECD (*fig.*16) ou à son supplément (*fig.*16 bis); mais DE étant parallèle à AB, l'angle FDE ou son supplément est égal à l'angle AFD, lequel est donc égal à ECD ou ACB. De-là il résulte que les triangles (*fig.* 16) AFD et ABC, qui ont en outre un angle commun CAB, sont semblables, et que AD:AF::AB:AC, d'où $AD \times AC = AF \times AB$. Or, le point A et le cercle DCE sont donnés, le rectangle $AD \times AC$ est donc connu; car il est égal au quarré de la tangente AG quand le point A est hors du cercle, et au quarré de la perpendiculaire A G (*fig.* 16 bis) sur le diamètre, quand le point A est dans l'intérieur du cercle. Ainsi le rectangle $AF \times AB$ est déterminé; et comme AB est donné, il sera facile d'en déduire AF, et par conséquent la position du point F. On aura donc celle de la tangente FD et du point D; en joignant ce point avec A qui est donné, la ligne AC et ensuite BC, ainsi que son intersection en E avec la circonférence, seront déterminées.

SYNTHÈSE.

Si le point A, *fig.* 16, est extérieur au cercle, menez la tangente AG, ou s'il est intérieur, *fig.* 16 (bis), élevez la perpendiculaire AG sur le diamètre qui passe par A. Prenez une troisième proportionnelle aux lignes AG, AB, et portez-la de A en F; par le point F menez la tangente FD, tirez la droite AD et prolongez-la jusqu'à la rencontre de la circonférence en C; tirez CB qui coupe le cercle en E; la ligne DE est parallèle à AB.

En effet, puisque AB:AG::AG:AF, $\overline{AG}^2 = AB \times AF$; mais d'un autre côté, $\overline{AG}^2 = CA \times AD$, donc $AB \times AF = CA \times AD$, et par conséquent AB:AC::AD:AF. Il suit de-là que les triangles BAC et DAF sont semblables comme ayant un angle commun compris entre deux côtés proportionnels; ainsi l'analyse ACB est égal à AFD; mais ACB ou DCE est égal à EDF ou à son supplément, par conséquent l'angle AFD est égal à EDF ou à son supplément, et la corde DE est parallèle à AB.

PROPOSITION XVII.

PROBLÊME.

Par deux points donnés, mener à un point de la circonférence d'un cercle deux droites telles que la corde de l'arc intercepté rencontre en un point donné la droite qui joint les deux premiers points donnés.

Il est question de mener par les points A et B (*fig.* 17) les droites AF et BF, de manière que la corde DG prolongée rencontre en C le prolongement de AB.

ANALYSE.

Menez DE parallèle à AC, tirez la droite EG, et prolongez-la jusqu'à ce qu'elle rencontre AB en H. L'angle BHG est égal à son

alterne GED, lequel est égal à GFD puisqu'il est inscrit dans le même segment; donc les angles BHG, BFA sont égaux, et les triangles BHG, BFA sont semblables. Ainsi BG:BH::BA:BF, et BG × BF = BH × BA; mais le rectangle BG × BF est connu, puisqu'il équivaut au quarré de la tangente menée par B; donc BH × BA est déterminé, et par conséquent le point H l'est aussi. Le problême est actuellement ramené au précédent, car il suffit de mener par les points C et H, les droites CD et HE, de telle manière que DE corde de l'arc intercepté, soit parallèle à HC.

SYNTHÈSE.

Par le point B menez au cercle une tangente BI, prenez BH de manière que BA:BI::BI:BH, et, par la dernière proposition, menez les droites HE et CD telles que DE soit parallèle à HC; alors si l'on prolonge BG jusqu'en F à la circonférence; ADF forme une ligne droite.

Car, puisque BA:BI::BI:BH, le rectangle BA × BH est équivalent au quarré de BI ou au rectangle BG × BF; donc BA:BF::BG:BH, et les triangles BAF et AGH sont semblables; donc BFA = BHG = GED = GFD. Les angles BFA et GFD étant égaux, il est clair que les lignes FA et FD sont dans le prolongement l'une de l'autre.

PROPOSITION XVIII.

PROBLÊME.

Par deux points donnés sur la circonférence d'un cercle, mener à un autre point de la partie opposée de la circonférence des droites qui coupent un diamètre donné en deux points également éloignés du centre.

Soit proposé de mener par les points A et B (*fig.* 18) les droites AC et BC, telles que les points F et G qu'elles déterminent sur le diamètre DE, s'écartent également du centre O.

Tirez la droite BA, prolongez-la ainsi que le diamètre ED jusqu'à leur rencontre en M, menez COL, abaissez du centre O sur AB la perpendiculaire OK, joignez le point K au point L, par A menez AHI parallèle à DE, et tirez HK.

Les parallèles FG et AI sont coupées en parties proportionnelles par les droites CA, CH et CI; et comme FO est égal à OG, il faut que AH soit égal à HI. Comme de plus, par construction, le point K est le milieu de AB, la droite HK est parallèle à IB, et l'angle AKH est égal à ABI. Or l'angle ABI ou ABC est égal à ALC, donc AKH est égal à ALH ou ALC; en observant de plus que les angles ALH et AKH reposent sur une même base AH, il est clair qu'à cause de leur égalité, il faut que le quadrilatère AKLH soit inscriptible dans une circonférence, et par conséquent que les angles HAK et HLK soient égaux. Mais HAK = OMK en vertu du parallélisme des droites AI et DE; donc OMK est égal à HLK ou OLK; ainsi le quadrilatère MOKL est pareillement inscriptible dans un cercle, et il en résulte que MLO est égal à MKO. Or l'angle MKO est droit, donc ML est une tangente. Cette tangente est une donnée, puisqu'on connaît le point M où concourent les droites ED et BA; donc on peut déterminer le diamètre LC et le point C.

SYNTHÈSE.

Prolongez ED et BA jusqu'à leur point de concours en M, menez la tangente ML et le diamètre LC; les lignes droites AC et BC sont telles que leurs points d'intersection avec le diamètre DE s'écartent du centre O de quantités égales OF et OG.

Pour le prouver menez AI parallèle à DE, OK perpendiculaire à AB, et tirez les droites LK et KH.

Puisque ML est une tangente, l'angle OLM est droit, il est donc égal à MKO; conséquemment MKL est égal à MOL, et de plus à AHL. Il résulte de-là que le quadrilatère AHKL est inscrip-

tible dans un cercle, et par conséquent l'angle ALH est égal à AKH; mais, par la même raison, ALH ou ALC est égal à ABC ou ABI; donc AKH = ABI, et KH est parallèle à BI. Maintenant puisque AK est égal à KB, il s'ensuit que AH est égal à HI, et que FO est égal à OG.

PROPOSITION XIX.

PROBLÊME. (*Fig.* 19 et 19 bis).

Par un point donné, mener une droite telle que le rectangle des segments interceptés sur elle par deux lignes données, soit équivalent à une surface donnée.

Soient AB, AC (*fig.* 19 ou 19 bis) deux droites données, et D un point par lequel il faut mener EF, de manière que le rectangle des segments ED, DF, équivaille à une aire donnée.

Tirez AD, et menez par F une droite FG faisant avec EF un angle égal à DAE; elle rencontre AD ou son prolongement en G. Les triangles ADE et FDG étant évidemment semblables, AD:ED::DF:DG, et par conséquent AD × DG = ED × DF. Le rectangle ED × DF étant donné, il en est donc de même du rectangle AD × DG, et comme AD est connu, DG et le point G peuvent être déterminés. De plus, puisque l'angle DFG est égal à l'angle connu DAC, si l'on décrit sur DG un segment *capable* de l'angle DAC, le point F devra se trouver sur l'arc de ce segment; ainsi l'intersection de cet arc avec la ligne AB fera connaître la position du point F; et selon qu'il y aura intersection réelle, ou seulement contact, le problème aura deux solutions ou une seule.

SYNTHÈSE.

Menez AD, prenez DG de manière que le rectangle AD × DG soit équivalent à l'espace donné, et sur DG décrivez un arc capable de

l'angle DAC; cet arc rencontre AB en F, F'; EDF ou E'DF' est la droite cherchée.

Car, d'après la construction, les triangles ADE et FDG sont semblables, et par conséquent AD:ED::FD:DG; donc $ED \times DF = AD \times AG$ = l'espace donné.

Quand le cercle touche la droite AB, les points F et F' coïncident, et le problême n'a qu'une solution. Dans ce cas, l'angle AFD ou BFD étant égal à DGF, est par conséquent égal à AED, et le triangle AFE est isocèle, donc AF = AE.

PROPOSITION XX.

PROBLÊME. (*Fig.* 20 et 20 (bis)).

Par un point donné, mener une droite qui détermine sur deux droites données, deux segments dont la somme soit égale à une longueur donnée.

Soient AB, AC (*fig.* 20 et 20 (bis)) des droites données, et D un point aussi donné, par lequel il faut faire passer une ligne EF, de manière que la somme des segments AE et AF, soit égale à ON.

Le problême présente deux cas, celui où le point D est dans l'angle aigu formé par les droites données, et celui où il est hors de cet angle.

PREMIER CAS. Le point D, *fig.* 20, est dans l'angle BAC.

ANALYSE.

Menez les droites DG et DH respectivement parallèles aux droites AB et AC.

Puisque le point D et les droites AB, AC sont donnés de position, le parallélogramme AGDH est déterminé. De plus, à cause de la similitude évidente des triangles EDG et DFH, EG:GD::DH:HF, et par conséquent $EG \times HF = GD \times DH$. Mais GD et DH sont

donnés, donc $EG \times HF$ l'est aussi. Faites maintenant $FK = EG$, et le rectangle $HF \times FK$ est connu; or la droite HK est donnée, puisqu'elle est égale à $HF + FK$, c'est-à-dire à l'excès de $AF + AE$ sur $GD + DH$; donc les segments HF, FK sont déterminés, et le point H étant donné, le point F ou F′ et la droite cherchée EDF ou E′DF′ sont connus.

SYNTHÈSE.

Menez les parallèles DG et DH à AB et AC. Sur la ligne donnée ON somme des deux segments AE et AF, portez une distance OP $= AG + AH$, et faites $HK = PN$. Sur HK, comme diamètre, décrivez une demi-circonférence; menez à cette circonférence les tangentes HI et KL égales respectivement à AH et AG, tirez la droite IL, et élevez perpendiculairement sur elle, par les points où elle rencontre le cercle, la ligne MF ou M′F′; EDF ou E′DF′ est la droite demandée.

Car, $HI \times KL = HF \times FK$ (1), et conséquemment $AH \times AG = HF \times FK$. Mais par la similitude des triangles EGD et DHF, $EG : GD$ ou $AH :: DH$ ou $AG : HF$, donc $AH \times AG = HF \times EG$; en comparant cette équation avec la précédente, il est évident que $KF = EG$. Puis donc que $AG + AH = OP$, et que $HF + EG = HK = PN$, il s'ensuit que $AG + EG + AH + HF$, ou $AE + AF = ON$.

Deuxième cas. Le point D est hors de l'angle BAC.

ANALYSE.

Menez DG (*fig.* 6 *bis*) parallèle à AB, et DH parallèle à AC, rencontrant AB prolongé en H. Les triangles EDG et DHF étant semblables, $EG : DG :: DH : HF$, d'où $EG \times HF = DG \times DH$; comme DG et DH sont données l'une et l'autre, il est clair que le rectangle $EG \times HF$ est connu. Si vous prenez maintenant FK

(1) A cause des triangles semblables HIM, FKM, on a la proportion, $HI : HM :: FK : KM$. Comparant les deux triangles FHM, KLM, on a : $HM : HF :: KM : KL$; de ces deux proportions, on tire $HI \times KL = HF \times FK$.

$=EG$, HK se trouve égal à $HF-EG=DG+AF-(DH-AE)$ $=AF+AE-(DH\times DG)$; de-là il résulte que HK et le rectangle $HF\times FK$ sont connus, et conséquemment que le point F est déterminé.

Si $DF'E'$ coupe les droites AB et AC de l'autre côté du sommet A, le problême se résout de la même manière. La similitude des triangles $E'DG$ et $DF'H$ existant encore, $E'G:DG::DH:HF'$, donc $E'G\times HF'$ est connu, puisqu'il est égal à $DG\times DH$. En prenant $F'K'=E'G$, il est évident que $HK'=E'G-HF'=AE'+DH-(DG-AF')=AF'+AE'+(DH-DG)$; ainsi la droite HK' et le rectangle $HF'\times F'K'$ sont connus, et il en est donc de même du point F'.

SYNTHÈSE.

Prenez OP ou OP' égal à la différence des parallèles DH et DG, portez de part et d'autre du point H deux distances $HK=PN$ et $HK'=P'N$; sur HK et sur HK' décrivez des demi-circonférences, par H élevez la perpendiculaire HI égale à DG, et par K et K' les perpendiculaires KL et $K'L'$ égales chacune à DH; tirez les droites IL et IL', et par les points M et M' où elles coupent les circonférences, élevez à angles droits sur elles les lignes MF et $M'F'$; les droites DEF et $DE'F'$ retrancheront sur AB et AC, deux segments qui, réunis, seront égaux à ON.

Car, $HF\times FK=HI\times KL=DG\times DH=HF\times EG$; donc $EG=FK$. Ainsi $HK=HF-EG=AF+AE-(DH-DG)$; et puisque $HK=PN=ON-(DH-DG)$, il s'ensuit que $AF+AE=ON$.

En raisonnant de la même manière, il est visible que $E'G=F'K'$, et que par conséquent $HK'=E'G-HF'=AF'+AE'+(DH-DG)$. Mais $HK'=P'N'=ON+(DH-DG)$, donc $AF'+AE'=ON$.

PROPOSITION XXI.

PROBLÊME.

Par un des sommets d'un quarré, mener une droite telle que la

partie interceptée entre les deux côtés opposés du quarré soit égale à une ligne donnée.

Soit ABCD (*fig.* 21) un quarré; il faut mener par son sommet A une droite AEF, de manière que la portion EF interceptée entre les côtés CD et BC ou leurs prolongements, soit d'une longueur donnée.

ANALYSE.

Menez FG perpendiculaire à AF, et par le point G où cette droite rencontre AB, menez sur BC prolongé la perpendiculaire GH; tirez de plus la droite EG.

L'angle EFH est égal à FEC+ECF; comme il est aussi égal à EFG+GFH, il est évident que les angles ECF et EFG étant l'un et l'autre droits, les angles CEF et GFH sont égaux; les triangles AED et FGH sont donc égaux, puisqu'ils ont tous leurs angles respectivement égaux, et que le côté AD est égal à HG; il suit de-là que le côté AE est égal à FG. Mais les triangles EFG et EDG étant rectangles, $\overline{EF}^2+\overline{FG}^2=\overline{EG}^2=\overline{ED}^2+\overline{DG}^2$, ou ce qui revient au même, $\overline{EF}^2+\overline{AE}^2=\overline{ED}^2+\overline{DG}^2$; or $\overline{AE}^2=\overline{AD}^2+\overline{ED}^2$; donc $\overline{EF}^2+\overline{AD}^2+\overline{DE}^2=\overline{ED}^2+\overline{DG}^2$; d'où $\overline{EF}^2+\overline{AD}^2=\overline{DG}^2$.

Par ce dernier résultat, il est clair que DG et conséquemment AG sont connus, puisque EF et AD sont donnés; comme l'angle droit AFG doit avoir son sommet situé sur la demi-circonférence qui a pour diamètre AG, ce sommet F ou F′ est déterminé par l'intersection de ce cercle avec BH; ainsi la droite AEF est connue.

SYNTHÈSE.

Prenez AI égal à la ligne donnée, menez DI et prolongez AD jusqu'en G d'une quantité égale à DI; sur AG décrivez un demi-cercle, et par le point F ou F′ de son intersection avec BC, menez les droites AEF ou AE′F′; la partie extérieure EF de cette ligne est égale à AI.

Pour le démontrer tirez FG, EG, et menez la perpendiculaire GH sur BF. Il est évident que $\overline{EF}^2+\overline{FG}^2=\overline{ED}^2+\overline{DG}^2$; et comme FG est égal à AE, $\overline{EF}^2+\overline{AE}^2=\overline{ED}^2+\overline{DG}^2$. Or $\overline{AE}^2=\overline{AD}^2+\overline{ED}^2$ et $\overline{DG}^2=\overline{DI}^2=\overline{AD}^2+\overline{AI}^2$; donc $\overline{EF}^2+\overline{AD}^2+\overline{ED}^2=\overline{ED}^2+\overline{AD}^2+\overline{AI}^2$, ct parconséquent $EF=AI$.

PROPOSITION XXII.

PROBLÊME.

Etant donnés la base AC (*fig.* 22) d'un triangle, la hauteur BD et le rectangle des deux autres côtés, construire le triangle.

ANALYSE.

Par les trois sommets du triangle ABC, faites passer un cercle, et tirez le diamètre BF ainsi que les rayons AE et CE. Le rectangle donné $AB\times BC$ étant égal à $BD\times BF$, à cause des triangles semblables ABD, BFC, ce second rectangle est également connu; et puisque la hauteur BD est donnée, le diamètre BF, et par suite les rayons AE, CE, sont déterminés. Mais la base AC étant donnée, les trois côtés du triangle AEC sont déterminés, et il en est de même par conséquent du centre E et du cercle ABCF. De plus, la distance du sommet B à la base étant donnée, il est clair que ce sommet doit être situé sur une parallèle à AC menée à cette distance-là; le point B est donc connu par l'intersection de cette parallèle avec la circonférence ABCF.

SYNTHÈSE.

Sur BD construisez un rectangle équivalent au rectangle donné $BF\times BD$; formez sur AC le triangle AEC qui ait les côtés AE et CE égaux chacun à la moitié du grand côté de ce rectangle; du point E avec le rayon EA décrivez une circonférence de cercle; sur AC élevez une perpendiculaire DB égale à la hauteur du triangle,

et par B menez à AC une parallèle qui rencontre la circonférence en B ou B'; ABC est le triangle demandé.

Car d'abord sa hauteur est évidemment égale à la hauteur donnée, et de plus le rectangle AB × BC étant égal à BF × BD, est aussi égal au rectangle donné.

PROPOSITION XXIII.

PROBLÊME.

Etant données l'hypothénuse d'un triangle rectangle, et la différence ou la somme des deux autres côtés, construire ce triangle.

ANALYSE.

Sur la base AB, *fig.* 23, ou sur son prolongement, portez une distance BD ou BE, égale à la perpendiculaire BC; tirez CD ou CE.

Les triangles CBD et CBE sont rectangles et isocèles, et par conséquent les angles D et E sont égaux chacun à un demi-angle droit. La somme AD des deux côtés AB et BC étant donnée, le point D et par conséquent la droite DC sont connus, puisque d'ailleurs celle-ci fait avec DA un angle donné; ou bien si c'est la différence AE des deux côtés qui est donnée, alors le point E est déterminé, et la droite EC est connue de grandeur et de position. Dans l'un et l'autre cas, puisque l'hypothénuse AC est donnée, le point C doit se trouver sur l'arc de cercle décrit de A comme centre avec le rayon AC; ce point sera donc déterminé par l'intersection de ce cercle et de la droite CD ou CE.

SYNTHÈSE.

Prenez AD ou AE égale à la somme ou à la différence de AB et BC, menez DC ou EC faisant avec AD un angle égal à la moitié d'un angle droit; décrivez du point A comme centre et avec le rayon AC un cercle qui rencontre DC ou EC au point C, et par ce point abais-

sez la perpendiculaire CB ; le triangle ACB satisfait aux conditions du problême.

Car les triangles rectangles CBD et CBE sont évidemment isocèles, et par conséquent AD est égal à la somme, et AE à la différence des côtés AB, BC.

PROPOSITION XXIV.

PROBLÊME.

Trouver la construction du pentagone régulier ou du décagone (1).

1° Tout polygone régulier peut être inscrit au cercle, et conséquemment les angles formés au centre par les rayons menés aux différents sommets de la figure, sont égaux chacun à la partie de quatre angles droits marquée par le nombre des côtés du polygone ; donc l'angle au centre d'un pentagone est la cinquième partie de quatre angles droits. Mais un angle dont le sommet est à la circonférence étant moitié de l'angle au centre dont les côtés coupent cette circonférence aux mêmes points, il est clair que l'angle au sommet du triangle isocèle formé dans le pentagone par des droites menées de l'un des angles du polygone aux extrémités du côté opposé, doit être la dixième partie de quatre angles droits. Or, si ce triangle était connu, le problême serait résolu puisque l'on connaîtrait l'angle au centre du pentagone ; la question de l'inscription du pentagone est donc ramenée à celle de construire un triangle isocèle dont un des angles est égal au dixième de quatre droits, ou au cinquième de deux droits.

2° Il suit de-là que les angles à la base de ce triangle isocèle, doivent, réunis, être égaux au reste de deux angles droits, c'est-à-dire que chacun d'eux est les deux cinquièmes de deux droits. Le triangle cherché jouit donc de cette propriété, que chacun des angles à la base est double de l'angle au sommet.

---

(1) Voyez Géométrie de M. Legendre, dixième édition, page 111.

3° Cela posé soit ABC (*figure* 24), un triangle isocèle, ayant les angles A et C doubles de l'angle B. Menez la droite CD qui coupe en deux parties égales l'angle ACB. L'angle BCD doit alors être égal à CBD, et par conséquent le côté CD est égal à BD. Mais, dans les triangles BAC et CAD, l'angle ABC est égal à ACD, l'angle CAB est commun, donc les angles restants BCA et CDA sont égaux; ainsi CDA est égal à CAD, et le côté AC est égal à CD. Les trois droites AC, CD et BD sont donc égales. De plus, puisque CD divise l'angle ACD en deux parties égales, BC:AC::AC:AD, ou bien AB :BD::BD:AD. Ainsi la droite AB est partagée au point D en moyenne et extrême raison, c'est-à-dire que le quarré de BD ou AC, base du triangle isocèle, est égal au rectangle du côté AB et du segment restant AD. Il est évident par ce résultat que la difficulté de la question primitive est réduite à celle de partager une ligne en moyenne et extrême raison.

4° Maintenant soit proposé de partager la droite AB (*fig.* 24 bis) en moyenne et extrême raison, c'est-à-dire de telle manière que $\overline{BC}^2 = BA \times AC$. Ajoutez aux deux membres de cette équation le rectangle $BA \times BC$, et $\overline{BC}^2 + BA \times BC = BA \times AC + BA \times BC$, ou bien $BC\,(BA + BC) = \overline{BA}^2$. Prolongez AB d'une quantité égale de B en D, il est évident que $BC \times CD = \overline{BD}^2$. Prenez le milieu de BD en E; les droites CD et BC sont la somme et la différence de CE et BE; donc le rectangle $CD \times BC$ ou le quarré de BA est égal à l'excès du quarré de CE sur le quarré de BE; ainsi $\overline{CE}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{BE}^2$. Elevez la perpendiculaire $BF = BA$, et menez EF. Il est évident que $\overline{EF}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{BE}^2$, et conséquemment $EF = CE$; EF étant donné, CE et BC le sont donc aussi.

La solution de ce problème rappelle une série des propositions les plus intéressantes de la Géométrie élémentaire (1).

---

(1) On peut ajouter aussi que cette solution est très-propre à donner une idée

PROPOSITION XXV.

PROBLÊME.

Trouver les conditions nécessaires pour la trisection de l'angle.

Soit ABC (*fig.* 25) un angle dont ABD est le tiers. Du sommet B comme centre et avec un rayon arbitraire, décrivez un cercle, menez DF parallèle à AB, joignez le point F au point C, et prolongez CF jusqu'à la rencontre de AB en G.

ANALYSE.

Puisque la corde DF est parallèle à AE, l'arc EF est égal à AD, et par conséquent l'angle EBF est égal à ABD, c'est-à-dire qu'il est la moitié de l'angle DBC. Or ce dernier angle est double de l'angle à la circonférence DFC ou de son égal BGF; donc les angles BGF et GBF sont égaux, et le triangle BFG est isocèle.

---

exacte et nette du caractère qui distingue les solutions analytiques. On a vu d'abord que le problême de trouver l'angle au centre du pentagone, se réduisait à la construction d'un triangle isocèle dont les angles à la base sont doubles de l'angle au sommet; ensuite, par une chaîne de raisonnements, la recherche de ce triangle a été ramenée à la division d'une ligne en moyenne et extrême raison. Enfin cette dernière question a été résolue toujours en suivant la même marche qui est d'aller continuellement du composé au simple. En supposant le problême résolu, on examine quelles sont les relations que cette hypothèse établit entre les données et les inconnues, et on combine ces relations en tendant constamment à les simplifier de plus en plus jusqu'à ce qu'enfin on soit arrivé à une relation assez simple pour qu'on en puisse déduire la valeur des quantités cherchées par des moyens déja connus. Tel est l'esprit de la méthode analytique qu'il faut bien distinguer des formules et des calculs mathématiques, quoique dans ces sortes de recherches l'analyse soit employée d'une manière presque exclusive. Mais l'analyse n'est pas seulement applicable aux recherches relatives à la grandeur et à la durée; elle est aussi le meilleur moyen de parvenir à la vérité dans quelque genre de question que ce soit.

(*Note du traducteur*, M. Comte.)

Ainsi la solution du problême proposé demanderait qu'on pût mener CFG, de manière que la partie extérieure FG fût égale au rayon du cercle.

Autre solution.

Soit l'angle ABD (*fig.* 25 *bis*), le tiers de l'angle ABC. Elevez la perpendiculaire DAC, achevez le rectangle BACE, prolongez les droites EC et BD jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en F, et menez CG faisant l'angle FCG égal à GFC.

ANALYSE.

Les angles FCG et GFC étant égaux, le côté GF est égal à CG, et chacun des angles précédents est la moitié de l'angle extérieur CGB. Mais puisque l'angle CBA est triple de ABD, il s'ensuit que CBG est double de ABD ou de son égal CFG; ainsi l'angle CBG est égal à CGB, et le côté BC est égal à CG. De plus, si des angles droits EBA et FCD, vous retranchez les angles égaux ABD et FCG, les angles restants EBD et GCD seront égaux; Mais EBD $=$ BDA $=$ CDF; donc l'angle GCD est égal à GDC, et par conséquent le côté GD est égal à GC. On voit par ce résultat que les quatre droites BC, GC, GD et GF sont toutes égales. Donc DF, segment extérieur de la ligne cherchée BF, est double de la diagonale BC du rectangle ABEC.

Scholie. Telles sont donc les conditions finales desquelles dépend la trisection d'un angle. Mais de les accomplir en général, cela passe les forces de la Géométrie élémentaire. A la vérité, dans un très-petit nombre de cas particuliers, la trisection d'un angle peut s'effectuer en n'employant que la ligne droite et le cercle. Ainsi, lorsque l'angle proposé est la moitié d'un droit, le problême peut être résolu de la manière suivante. Prolongez BE (*fig.* 25 *ter*), de manière que BH $=2$BC, menez AH, prolongez BA d'une quantité AI $=$ AH, et

sur BI décrivez un demi-cercle ; il sera rencontré en F par le prolongement de EC, et si vous tirez BF, l'angle ABF ainsi formé sera le tiers de ABC.

Ce dernier résultat peut être démontré directement par un simple examen de la construction. Car $\overline{BH}^2 = 4\overline{BC}^2 = 8\overline{BA}^2$, et $\overline{AI}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{BA}^2 = 9\,\overline{BA}^2$; donc $AI = 3BA$, $BI = 4BA$, et $OI = 2BA$. Abaissez maintenant la perpendiculaire FL, prolongez-la d'une égale quantité au-dessous de BI, et menez OF et OM. Il est évident que les droites OF et OM sont égales, et que $FM = 2BA$; or $OF = OI = 2BA$; donc $OF = OM = FM = 2BA$; donc le triangle FOM est équilatéral, et l'angle FOM est par conséquent les deux tiers d'un angle droit. Il suit de-là que l'angle FOL est le tiers d'un droit, et que ABF qui est évidemment la moitié de FOL, est le sixième d'un droit.

PROPOSITION XXVI.

PROBLÊME.

Déterminer les conditions auxquelles on doit satisfaire pour insérer deux moyennes proportionnelles (1) entre deux lignes données.

Supposez que les côtés AB et AC (*fig.* 26) du rectangle ABCD

---

(1) On entend par moyennes proportionnelles entre deux lignes données, des lignes telles qu'elles forment les moyens d'une proportion continue dont les extrêmes sont les lignes données. Si l'on appelle x et y les deux droites cherchées, a et b les deux droites données, il faut qu'on ait

$$a : x :: x : y :: y : b.$$

Cette proportion fournit évidemment deux équations

$$x^2 = ay, \quad y^2 = bx$$

desquelles on peut déduire par l'élimination

$$x^3 = a^2 b, \quad y^3 = ab^2.$$

Si l'on suppose que $b = 2a$, alors $x^3 = 2a^3$, c'est-à-dire que le cube construit avec la ligne cherchée est double de celui qui a pour arête la ligne donnée. Ainsi

soient les deux extrêmes d'une proportion continue qui a pour termes moyens DE et AG, en sorte qu'on ait AB:DE::DE:AG ::AG:AC.

ANALYSE.

Menez CE et CG. Les triangles DCE et ACG sont semblables, car ils sont tous deux rectangles, l'un en D, l'autre en A, et de plus AB ou CD:DE::AG:AC; les angles DEC et ACG sont donc égaux, et par conséquent ECG forme une ligne droite. Tirez les diagonales BC, AD, et joignez leur intersection O avec les points E et G. Puisque les triangles BOD et BOA sont isocèles, $\overline{OE}^2 = \overline{OD}^2 + BE \times ED$ (2), et $\overline{OG}^2 = \overline{OA}^2 + BG \times GA$. Or, BG:BE::GA:AC::ou DE :GA; donc $BG \times GA = BE \times DE$; de plus $OA = OD$, ainsi $OE = OG$, et le point O est également distant des points E et G. Il résulte de-là que si on circonscrivait un cercle au rectangle donné, le segment intercepté EC serait égal à GH.

Première solution.

Le problême sera donc résolu si l'on peut mener par le point C une droite ECG telle que la distance OE soit égale à OG, ou que les parties EC, GH, extérieures au cercle, soient égales.

Deuxième solution.

La première partie de la construction restant la même, et après avoir démontré que le rectangle $BE \times ED$ est égal $BG \times GA$, partagez

---

le problême de la duplication du cube n'est qu'un cas particulier de la question qui nous occupe. En général il ne peut pas être résolu avec la règle et le compas; mais on en peut avoir une solution numérique aussi approchée qu'on le desire, et cette solution peut être construite par l'intersection des deux paraboles qui ont pour équations $x^2 = ay$, $y^2 = 2ax$.

(2) Ayant abaissé la perpendiculaire OI sur BD, on a $\overline{OE}^2 = \overline{OI}^2 + \overline{IE}^2$; $\overline{OD}^2 = \overline{OI}^2 + \overline{ID}^2$; donc $\overline{OE}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{IE}^2 - \overline{ID}^2 = \overline{OD}^2 + (IE+ID)\ (IE-ID) = \overline{OD}^2 + BE \times ED$.

BD en deux parties égales au point F (*fig.* 26 *bis*); il est évident que $BE \times ED + \overline{DF}^2$ ou $\overline{EF}^2 = BG \times GA + \overline{DF}^2$. Construisez maintenant sur AB le triangle isocèle BKA, dont les côtés KB, KA soient égaux chacun à DF, et menez la droite GK; alors $BG \times GA + \overline{AK}^2 = \overline{GK}^2$ et conséquemmment GK = EF. Mais par hypothèse, AB:DE::DE :GA::GA:AC, donc AB:GA::DE:AC, ou 2AB:GA::2DE:AC; si vous tirez la ligne CF et que vous la prolongiez jusqu'à la rencontre de AB en L, le triangle BKL ainsi formé sera égal à CFD, et CD ou AB = BL. Ainsi AL:GA::2DE:AC ou BD, ou::DE :$\frac{1}{2}$BD; il suit de-là que GL:GA::EF:DF. Tirez la droite LK, et menez-lui la parallèle AM; alors GL:GA::GK:GM, d'où EF DF::GK:GM; mais EF = GK, donc DF = GM. Il suit de ce résultat que la droite LK et sa parallèle AM sont connues de position, puisque les points F, L et K sont évidemment donnés.

Le problême se trouve donc réduit à mener par le point K une droite KMG, telle que la partie MG interceptée entre AM et BA prolongé soit égale à la moitié du côté donné AC.

Troisième solution.

Supposez toujours que les deux lignes à angles droits AB et AC (*fig.* 26 *ter*) soient les extrêmes de la proportion continue; prenez sur les prolongements de AC et de AB deux points D, E tels que AB :AD::AD:AE::AE:AC. Alors $\overline{AE}^2 = AD \times AC$; donc le point E se trouve sur la demi-circonférence dont CD est le diamètre. Menez DE, prolongez DB jusqu'à la circonférence, et élevez le rayon IF perpendiculairement sur DC. Puisque AB:AD::AD:AE, et que l'angle DAE est commun aux deux triangles BAD et DAE, ces triangles sont semblables; par conséquent l'angle ADB est égal à AED, et l'arc CG est égal à DE; d'où il suit que l'arc FG est égal à FE, et que le segment IH du diamètre est égal à IA, ou que l'oblique GL est égale à LB.

La solution du problême dépend donc de la condition que GD ait son segment GL égale à LB, ou que les perpendiculaires EA et GH soient également distantes du centre. Le rapport de KI à IC est évidemment le même que celui de AB à AC. Par conséquent après avoir décrit un demi-cercle du rayon IC, si l'on pouvait mener par le point B une droite BD, telle que la partie BG de cette droite comprise entre la circonférence et la ligne CKM tirée par l'autre extrémité du diamètre, fût partagée en deux parties égales par le rayon IF, le problême serait résolu; car si l'on prend $AN = AD$, et que l'on tire CN rencontrant IF en O, il est manifeste, d'après ce qui précède, que les droites IK, IO, IL, et IC forment une proportion continue.

PROPOSITION XXVII.

Le problême suivant étant supposé résolu, si l'on a (*fig.* 27): $3\overline{AG}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EB}^2 + \overline{EF}^2$; l'angle CEGdu triangle CEG est déterminé.

PROBLÊME.

Dans le demi-cercle ABD (*fig.* 27), la demi-corde EF et le rayon CD étant à angles droits sur AB, on propose de mener la droite AG, de telle manière que $3\overline{AG}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EB}^2 + \overline{EF}^2$.

Solution.

Inscrivez dans le cercle une corde BH égale au rayon, tirez AH, et menez à cette droite la parallèle EG qui rencontre CD en G; alors si vous menez AG, $3\overline{AG}^2$ sera égal à $\overline{AE}^2 + \overline{EF}^2 + \overline{EB}^2$.

En effet les triangles AHB et ECG étant évidemment semblables, $AB : BH :: EG : CG$; mais $AB = 2BH$, donc $EG = 2CG$. Ainsi $\overline{EG}^2 = 4\overline{CG}^2$, et $\overline{EC}^2 = 3\overline{CG}^2$; par conséquent $3\overline{AG}^2 = 3\overline{AC}^2 + \overline{EC}^2 = 2\overline{AC}^2 + 2\overline{EC}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{EC}^2$. Maintenant à cause de $AC = \frac{EB + AE}{2}$ et $EC = \frac{EB - AE}{2}$, $2\overline{AC}^2 + 2\overline{EC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EB}^2$, et $\overline{AC}^2 - \overline{EC}^2 = \overline{EF}^2$, donc $3\overline{AG}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EF}^2 + \overline{EB}^2$.

PROPOSITION XXVIII.

Si l'un des angles d'un triangle est donné, l'excès du quarré de la somme des côtés qui comprennent cet angle, sur le quarré de la base, a un rapport déterminé avec l'aire du triangle.

Soit ABC (*fig.* 28) un triangle dont le côté AB est prolongé d'une quantité BD = BC; l'excès du quarré de AD sur celui de AC est dans un rapport déterminé avec l'aire du triangle.

ANALYSE.

Menez AE parallèle à BC, et rencontrant CD prolongé en E; du point B abaissez la perpendiculaire BF, et tirez la droite BE.

Le triangle CBD étant isocèle, l'angle CDB est égal à DCB, et par conséquent à CEA; le triangle DAE est donc aussi isocèle. Il s'ensuit que $\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + DC \times CE$, ou $\overline{AD}^2 - \overline{AC}^2 = DC \times CE$. De plus puisque AE est parallèle à BC, le triangle ABC est équivalent à EBC, c'est-à-dire à la moitié du rectangle $BF \times CE$. Conséquemment l'excès du quarré de AD sur le quarré de AC est à l'aire du triangle ABC, comme $DC \times CE$ est à $\frac{1}{2} BF \times CE$, ou comme DC est à $\frac{1}{2}$ BF, ou bien encore comme 4DF est à BF. Mais l'angle donné ABC étant égal à CDB+BCD, est double de chacun de ces angles; donc l'angle BDF est connu; d'où il résulte que le triangle rectangle BDF est déterminé d'espèce, et que le rapport de DF à BF est connu : il en est donc de même du rapport de 4DF à BF, ou de l'excès du quarré de AD sur celui de AC à l'aire du triangle.

SYNTHÈSE.

En conservant la même construction, il est clair que $DC \times CE : BF \times CE :: DC : BF$, mais $DC \times CE = \overline{AD}^2 - \overline{AC}^2$, et $BF \times CE$ est le double de l'aire du triangle ABC; donc 2DC est à BF, comme l'excès du quarré de AD sur le quarré de AC est à l'aire du triangle ABC.

LIVRE II.

DÉFINITION.

Une quantité variable qui dérive d'une quantité constante, ou qui en dépend par quelque relation assujétie à une loi déterminée, est renfermée nécessairement entre certaines limites extrêmes. Quand elle a acquis la plus grande valeur possible, on dit qu'elle a atteint son *maximum*; et quand elle se resserre dans ses plus petites dimensions, elle est à l'état de *minimum*.

PROPOSITION PREMIÈRE.

PROBLÊME.

Par un point donné, mener une droite qui intercepte sur deux parallèles données, des segments qui aient entre eux un rapport donné.

Soient AB et CD (*fig.* 1, *pl.* 2) deux parallèles sur chacune desquelles on fixe un point P et O; il faut mener, par un autre point donné E, une droite EF telle que PG soit à OF dans un rapport donné.

ANALYSE.

Menez PO, et prolongez cette droite jusqu'à sa rencontre avec EF en I.

Puisque PG et OF sont parallèles, PI:OI::PG:OF, mais le rapport de PG à OF est donné; celui de PI à OI et celui de PO à

OI le sont donc aussi, d'où il suit que OI et le point I sont connus, puisque PO est donné, donc IEF et les segments PG et OG sont déterminés.

SYNTHÈSE.

Prenez PK = M et OL = N, tirez les droites KL, PO, et prolongez-les jusqu'à leur point de concours I; joignez ce point avec E par la droite IEF; PG et OF sont les segments cherchés.

Car les parallèles AB et CD étant coupées en parties proportionnelles par les droites IK, IP et IG, le rapport de PG à OF est égal à celui de KP à OL ou de M à N.

Si M = N, le point I se trouve situé à l'infini, et EF devient évidemment parallèle à OP.

Si les droites KL et PO concourent au point donné E, le problème est indéterminé, c'est-à-dire qu'il admet une infinité de solutions; et en effet, dans ce cas, les segments PG et OF interceptés par une ligne quelconque passant au point E, sont dans le rapport donné.

PROPOSITION II.

PROBLÊME.

Deux droites qui se coupent étant données de position, mener, par un point donné, une droite qui détermine sur elles des segments dont le rapport soit égal à un rapport donné.

Soit proposé de mener par le point D (*fig.* 2), la droite EDF telle que AE soit à AF comme M est à N.

ANALYSE.

Par D menez à AE la parallèle DG, qui rencontre AC ou son prolongement en G.

Les triangles EAF et DGF étant semblables, AE:AF::GD:GF; mais le rapport de AE à AF est donné, celui de GD à GF l'est

donc aussi. Et puisque GD et le point G sont évidemment connus, il en est de même de GF et du point F.

SYNTHÈSE.

Sur AB et AC prenez des distances AK = M, et AL = N, tirez KL et menez par le point D à cette droite la parallèle DEF; AE et AF sont les segments demandés.

Car les parallèles EF et KL coupent en parties proportionnelles les droites AB et AC, et le rapport de AE à AF est le même que celui de AK à AL ou de M à N.

PROPOSITION III.

PROBLÊME.

Deux droites qui se coupent étant données, mener par un point donné une droite qui détermine sur chacune d'elles des segments qui aient un rapport donné; ces segments étant comptés, pour la première à partir du point de concours, et pour la seconde à partir d'un point donné.

Soient AB et AC (*fig.* 3) deux droites qui se coupent; il faut, par le point D, mener EDF de manière que AE soit à OF comme M est à N.

ANALYSE.

Menez DG parallèle à AE, et rencontrant AC ou son prolongement en G; prenez un point H tel que AE:GD::OF:OH. Le rapport de AE à OF étant connu, celui de GD à OH l'est donc aussi; et puisque GD et le point O sont donnés, il en est de même de OH et du point H. A cause des parallèles DG et AE, AE:GD::AF:GF, donc OF:OH::AF:GF; d'où il suit que FH:OH::AG:GF, et GF × FH = AG × OH. Mais AG et OH sont tous deux connus, donc le rectangle des segments GF et FH dont la différence est

connue, est déterminé; le point F et la droite ED le sont donc aussi.

SYNTHÈSE.

Prenez le point H de manière que GD:OH::M:N, et cherchez sur GH prolongé un point F tel que le rectangle $GF \times FH$ soit égal à $AG \times OH$; menez EDF, et les segments AE, OF sont dans le rapport de M à N. Car $GF \times FH = AG \times OH$, donc FH:OH::AG:GF, et OF:OH::AF:GF; mais AE:GD::AF:GF, par conséquent AE:OF ::GD:OH, c'est-à-dire::M:N.

PROPOSITION IV.

PROBLÊME.

Deux droites qui se coupent étant données, mener par un point donné une ligne telle que les distances des points où elle rencontre les deux premières à deux autres points donnés sur celles-ci, soient dans un rapport également donné.

Soient AB, AC (*fig.* 4) deux droites qui se coupent; il est question de mener par le point D la droite EDF de manière que PE soit à OF comme M est à N, les points P et O étant donnés.

ANALYSE.

Tirez DP qui rencontre AC en I, et par le point I, menez IK parallèle à AB, qui coupe EF en K.

Puisque les points P et D sont donnés, la droite PD est donnée de position, et par conséquent le point I et la droite IK sont également déterminés. Mais PE:IK::PD:ID, donc le rapport de PE à IK est connu, puisque PD et ID sont données; d'ailleurs le rapport de PE à OF étant donné, celui de IK à OF l'est aussi; donc au moyen de la proposition précédente, la position de la droite EDF sera déterminée.

SYNTHÈSE.

Tirez PD et menez IK parallèle à AB; prenez une ligne IK=L telle que le rapport de M à L soit égal à celui de PD à ID, et menez, par la proposition précédente, la droite KDF de telle manière que IK soit à OF comme L est à N; alors PE et OF seront les segments cherchés.

Car PE:IK::PD:ID::M:L, et IK:OF::L:N; donc PE:OF ::M:N.

PROPOSITION V.

PROBLÊME.

Etant donné deux parallèles et une droite qui les coupe, mener, par un point de cette sécante, une autre droite telle que les segments interceptés sur les parallèles entre elle et la sécante, forment un rectangle donné.

Soient AB, CD deux parallèles (*fig.* 15), et OPG une sécante; on propose de mener par le point G, la droite GFE qui intercepte deux segments OE et PF, dont le rectangle soit égal à un rectangle donné.

ANALYSE.

Puisque AB et CD sont parallèles, GO:GP::OE:PF, et par conséquent GO:GP::$\overline{OE}^2$:PF × OE; or GO et GP sont donnés, donc le rapport de $\overline{OE}^2$ à PF × OE l'est aussi; mais le rectangle PF × OE est également donné, d'où il suit que le quarré de OE, et OE lui-même sont déterminés.

SYNTHÈSE.

Portez sur GO de G en I une moyenne proportionnelle entre GO et GP, menez IK parallèle à AB et CD, et faites cette droite IK d'une longueur telle que son quarré équivaille au rectangle donné; tirez la droite EKFG, c'est la ligne demandée.

10.

Car les droites OE, IK et PF étant parallèles, OG:IG::OE:IK, et PG:IG::PF:IK; en multipliant ces proportions par ordre, on en déduit que $OG \times PG : \overline{IG}^2 :: OE \times PF : \overline{IK}^2$; mais $OG \times PG = \overline{IG}^2$, donc $OE \times PF = \overline{IK}^2$.

PROPOSITION VI.

PROBLÊME.

Par un point donné, mener une droite qui intercepte sur deux parallèles données, et à partir de deux points donnés deux segments dont le rectangle soit égal à un rectangle donné.

Soient AB et CD (*fig.* 6, *pl.* 2) deux parallèles sur lesquelles on donne les points O et P; il est question de mener par le point G une droite GFE, telle que les segments OE et PF forment un rectangle donné.

ANALYSE.

Menez GO et GP qui rencontrent CD et AB en I et H. Ces deux points sont connus, puisque les points P, O et G étant donnés, les droites GIO et GPH sont données de position. Comme AB est parallèle à CD, il est clair que GP:GH::PF:HE, ou ce qui revient au même $GP:GH::PF \times OE:HE \times OE$. Maintenant GP et GH étant donnés, leur rapport l'est aussi; il en est donc de même du rapport de $PF \times OE$ à $HE \times OE$; le premier de ces deux rectangles étant donnés, le second est donc connu; comme de plus la différence de HE à OE est donnée, il est évident que le point E est déterminé, et conséquemment la droite cherchée EFG.

SYNTHÈSE.

Menez GO et GP; Portez de H en K une droite HK qui forme avec GP un rectangle égal au rectangle donné; cherchez ensuite sur le prolongement de HO un point E tel que le rectangle $HE \times OE$ soit égal à $HG \times HK$; la droite qui joint ce point au point G, est la droite cherchée.

Car HE:PF::HG:GP, d'où HE×OE:PF×OE::HG×HK :GP×HK; mais par construction le rectangle HE×OE est égal à GH×HK, donc PF×OE est égal à GP×HK, c'est-à-dire au rectangle donné.

PROPOSITION VII.

PROBLÊME.

Deux droites qui se coupent étant données, mener, par un point donné, une troisième droite telle que les segments qu'elle détermine sur elles à partir de leur point de concours, forment un rectangle donné.

Soient AB et AC (*fig.* 7) les deux lignes données; on propose de mener, par le point D, la droite DFE de manière que le rectangle des segments AE, AF, soit égal à un rectangle donné.

ANALYSE.

Menez HD parallèle à AB, et prenez le point I de manière que DH×AI équivaille au rectangle donné.

Puisque AE×AF = DH×AI, AE:DH::AI:AF, mais d'un autre côté, AE:DH::AF:FH, donc AF:FH::AI:AF, d'où il résulte que AH:AF::IF:AI, et par conséquent AH×AI = AF×IF. Or AH et DH sont au nombre des données; donc AI est connu, ainsi que le rectangle AF×IF. La question se réduit donc à partager au point F la ligne donnée AI de manière que le rectangle des deux segments soit équivalent à un rectangle donné, problême qui a déja été résolu.

SYNTHÈSE.

Menez DH parallèle à AB, déterminez le point I par la condition que DH×AI soit égal au rectangle donné, et divisez AI de manière que le rectangle des segments AF, FI, équivaille au rectangle AI ×AH; EDF est la droite cherchée. Car par construction AF×IF = AI×AH, donc AH:AF::IF:AI, d'où AF:FH::AI:AF; mais,

d'ailleurs, AF:FH::AE:DH, par conséquent AE:DH::AI:AF, et AE × AF = DH × AI.

PROPOSITION VIII.

PROBLÊME.

Par un point donné, mener une droite telle que par son intersection avec deux droites données qui se coupent, elle forme un triangle d'une aire donnée.

Soit proposé de mener par le point D (*fig.* 8), la droite EDF qui coupe les droites AD, AC de manière que le triangle AEF soit équivalent à un espace donné.

ANALYSE.

Menez DH parallèle à AB, abaissez sur AC les deux perpendiculaires ES et DT, et prenez le point I de manière qu'un triangle qui aurait AI pour base et DT pour hauteur, fût équivalent à l'espace donné.

Puisque les rectangles ES × AF et DT × AI sont chacun double des triangles AEF et ADI, ils sont équivalents, et par conséquent ES:DT::AI:AF. Mais les triangles AES et HDT étant évidemment semblables, AE:HD::ES:DT, d'où AE:HD::AI:AF et AE × AF = HD × AI. Maintenant HD et conséquemment AI sont donnés; donc le rectangle AE × AF est connu, et, par la dernière proposition, on peut déterminer la droite EDF.

SYNTHÈSE.

Menez DH parallèle à AB, abaissez la perpendiculaire DT, partagez-la en deux portions égales au point R, et prenez AI de façon que le rectangle DR × AI soit équivalent à l'espace donné; ensuite, par la proposition précédente, menez EDF telle que le rectangle AE × AF équivaille à DH × AI.

Ayant abaissé la perpendiculaire ES dont Q est le milieu, il est

clair que les triangles AES et HDT sont semblables; donc $AE \times AF : DH \times AI :: QS \times AF : RT \times AI$; mais le rectangle $AE \times AF = HD \times AI$, par conséquent $QS \times AF = RT \times AI$, ce qui démontre que le triangle AEF est équivalent à l'espace donné.

Ce problême est susceptible d'une construction simple, dans le cas où le point D se trouve dans l'angle aigu formé par les droites AB et AC. En effet menez DG parallèle à AC, et faites le parallélogramme AGKI équivalent à l'espace donné.

Puisque le parallélogramme AGKI et le triangle AEF sont équivalents, si vous les retranchez l'un et l'autre du polygone AEDKLF, les triangles restants GED+ILF d'une part, et DLK de l'autre, seront équivalents; mais ces triangles supplémentaires étant formés par des lignes parallèles, sont évidemment semblables, et par conséquent GD et IF étant les côtés d'un triangle rectangle, DK en sera l'hypothénuse, puisque les aires des triangles semblables sont entre elles comme les quarrés des côtés homologues; donc $\overline{GD}^2 + \overline{IF}^2 = \overline{DK}^2$, ou $\overline{IF}^2 = \overline{HI}^2 - \overline{AH}^2$. Or AH et HI sont donnés, donc IF est déterminé.

SYNTHÈSE.

Construisez le parallélogramme AGKI équivalent à l'espace donné, menez DH parallèle à AB, sur HI décrivez un demi-cercle dans lequel vous porterez la corde HM égale à AH, menez IM, et faites IF ou $IF' = IM$; EDF ou E'DF' est la base du triangle cherché.

En effet, le triangle HMI étant rectangle, il est clair que $\overline{IH}^2 = \overline{HM}^2 + \overline{IM}^2$, ou bien $\overline{DK}^2 = \overline{GD}^2 + \overline{IF}^2$; de ce résultat et de la similitude évidente des triangles DLK, GED, et ILF, ou DL'K, GE'D, IL'F', on déduit que le triangle DLK est équivalent à la somme des triangles GED et ILF, ou DL'K' à celle des triangles GE'D et ILF'. En ajoutant de part et d'autre l'excès du parallélogramme AK sur le triangle DLK, il en résulte que le triangle AEF ou AE'F' est équivalent au parallélogramme AK, c'est-à-dire à l'espace donné.

PROPOSITION IX.

PROBLÊME.

Deux droites qui se coupent étant données, mener par un point donné une autre droite qui détermine sur elles deux segments dont le rectangle soit égal à un rectangle donné; ces segments étant comptés, l'un à partir du point d'intersection des droites données, et l'autre à partir d'un point fixe sur l'une de ces droites.

Soit proposé de mener EDF (*fig.* 9), de manière que le rectangle $AE \times OF$, soit égal à un rectangle donné.

ANALYSE.

Menez DH parallèle à AB, et prenez OI de façon que le rectangle $DH \times OI$, équivaille à l'espace donné; OI et le point I sont par conséquent donnés. Et puisque $AE \times OF = DH \times OI$, il s'ensuit que $AE:DH::OI:OF$; mais d'un autre côté, $AE:DH::AF:FH$, donc $AF:FH::OI:OF$. De cette proportion il résulte que $AF:AH::OI:FI$, et que $AF \times FI = AH \times OI$; Ainsi AI et le rectangle de ses segments AF, FI, sont donnés; donc on peut déterminer le point F, et par conséquent la droite EDF.

SYNTHÈSE.

Après avoir mené DH parallèle à AB, et avoir fait le rectangle $DH \times OI$ équivalent à l'espace donné, partagez AI en F ou en F′, de telle manière que le rectangle de ses parties soit égal à $AH \times OI$; EDF, ou E′DF′, sera la ligne cherchée. En effet, $AF \times FI$ étant égal à $AH \times OI$, il en résulte que $AF:AH::OI:IF$, d'où $AF:FH::OI:OF$; mais d'ailleurs, $AF:FH::AE:DH$, donc $AE:DH::OI:OF$; ainsi le rectangle $AE \times OF$ est égal à $DH \times OI$, c'est-à-dire au rectangle donné.

PROPOSITION X.

PROBLÊME.

Deux droites qui se coupent étant données, ainsi qu'un point sur chacune d'elles, mener, par un autre point donné, une troisième ligne qui détermine sur les deux premières, et à partir de chacun des points donnés sur elles, des segments dont le rectangle soit égal à un espace donné.

Soit proposé de mener EDF (*fig.* 10) de manière que le rectangle OF × PE équivaille à un rectangle donné.

ANALYSE.

Menez la droite DO, et par le point de son intersection avec AB, menez QR parallèle à AC.

Puisque DO:DQ::OF:QR, il s'ensuit que DO:DQ::OF × PE :QR × PE; mais DO et DQ sont évidemment donnés, il en est donc ainsi du rapport de OF × PE à QR × PE; le premier de ces rectangles étant donné, le second est donc déterminé. Si l'on observe de plus que la droite QR étant parallèle à AC, elle est déterminée de position, on verra que le problême revient à celui que nous avons résolu en dernier lieu.

SYNTHÈSE.

Tirez la droite DQO, menez à AC les parallèles DH et QR, et prolongez DH en S jusqu'à la rencontre de OS, parallèle à AB menée par le point O; ensuite prenez PI de manière que le rectangle DS × PI équivaille à l'aire donnée, et cherchez, par la dernière proposition IX, un point E sur le prolongement de PI, qui soit tel que QR × PE soit égal à DH × PI; EFD est la droite cherchée.

Car, DQ:DO::DH:DS::QR:OF, donc DH × PI:DS × PI::PE × QR:PE × OF; mais DH × PI = PE × QR, par conséquent le

rectangle $DS \times PI$, c'est-à-dire l'espace donné équivaut au rectangle $PE \times OF$.

PROPOSITION XI.

PROBLÊME.

Partager une ligne donnée en deux portions telles que le quarré construit sur l'une soit équivalent au rectangle construit avec l'autre et avec une ligne donnée.

Soit proposé, *fig.* 11, de partager AB au point C, de manière que le rectangle $G \times AC$ équivaille au quarré de CB.

ANALYSE.

Prenez $BD = G$, et puisque $AC \times G = \overline{CB}^2$, il est clair que $AC : CB :: CB : BD$; donc $AB : CB :: CD : BD$, d'où $AB \times BD = CB \times CD$. Le rectangle $AB \times BD$ est donné, donc il en est de même de $CB \times CD$; comme de plus la ligne BD est donnée, il est évident qu'on pourra déterminer la position du point C, (voyez proposition XIII, livre I[er], page 46).

SYNTHÈSE.

Après avoir fait $BD = G$, déterminez un point C tel que le rectangle $CB \times CD$ soit équivalent à $AB \times BD$; C sera le point de division cherché. Car on aura évidemment $AB : CB :: CD : BD$, d'où $AC : CB :: CB : BD$, et $AC. BD = \overline{CB}^2$.

PROPOSITION XII.

PROBLÊME.

Diviser une ligne donnée en deux portions telles que le quarré de la première soit dans un rapport donné avec le rectangle construit sur la seconde et sur une droite donnée.

Soit proposé de déterminer sur AB (*fig.* 8) un point C tel que $AC \times G$ soit à $\overline{CB}^2$ comme M est à N.

ANALYSE.

Prenez une quatrième proportionnelle H aux droites données M, N, G. Vous aurez alors $AC \times G : \overline{CB}^2 :: G : H$, donc $\overline{CB}^2 = AC \times H$. Ainsi le problême est ramené au précédent.

SYNTHÈSE.

Ayant pris la ligne H comme ci-dessus, divisez AB par la dernière proposition, de façon que $AC \times H$ soit égal à $\overline{CB}^2$. Il est clair qu'alors $AC \times G : \overline{CB}^2 :: M : N$; car $AC \times G : AC \times H$ ou $\overline{CB}^2 :: G : H$ ou $:: M : N$.

PROPOSITION XIII.

PROBLÊME.

Etant donnés trois points sur une même ligne droite, on propose d'en trouver un quatrième tel que le rectangle fait avec sa distance au premier point et une ligne donnée, soit équivalent à celui qui aurait pour côtés ses distances aux deux autres points.

Il est question de trouver un point D (*fig.* 13) tel que $AD \times G = CD \times BD$.

ANALYSE.

Faites $BE = G$; puisque $AD \times G = CB \times BD$, il s'ensuit que $AD : CB :: BD : BE$, d'où $AC : CD :: DE : BE$, et $AC \times BE = CD \times DE$. Le rectangle $AC \times BE$ étant évidemment donné, il en est de même pour celui des segments CD, DE dont la différence CE est aussi connue. Par conséquent le point D est déterminé.

SYNTHÈSE.

Après avoir fait $BE = G$, partagez CE en D de manière que $CD \times DE = AC \times BE$; D est le point cherché.

Car $AC : CD :: DE : BE$, d'où $AD : CD :: BD : BE$, et $AD \times BE$ ou $AD \times G = CD \times BD$.

PROPOSITION XIV.

PROBLÊME.

Etant donnés trois points sur une même ligne droite, on propose d'en trouver un quatrième tel que le rectangle fait avec sa distance au premier point et une ligne donnée soit dans un rapport donné avec celui qui aurait pour côtés ses distances aux deux autres points.

Il est question de trouver un point D (*fig.* 14) tel que AD×G soit à CD×BD comme M est à N. (1).

ANALYSE.

Prenez une ligne H quatrième proportionnelle à M, N, G, vous aurez AD×G:CD×BD::G:H, et par conséquent AD×H=CD ×BD; maintenant le point D sera déterminé par la proposition précédente.

SYNTHÈSE.

Ayant pris H comme ci-dessus, cherchez par la dernière proposition un point D tel que CD×BD=AD×H; ce sera le point cherché; puisque AD×G:AD×H ou CD×BD::G:H ou::M:N.

PROPOSITION XV.

PROBLÊME.

Etant donnés trois points sur une même ligne droite, on propose d'en trouver un quatrième tel que le quarré de sa distance au premier soit égal au rectangle de ses distances aux deux autres.

Il faut trouver un point D (*fig.* 15) tel que $\overline{AD}^2$ = CD×BD.

Premier cas. Quand le point D est entre A et B.

ANALYSE.

Puisque $\overline{AD}^2$ = CD×BD, il s'ensuit que CD:AD::AD:BD, d'où

(1) Le lecteur est prié de faire les figures relatives aux propositions 14 et 15.

AC:AD::AB:BD, ou bien AC:AB::AD:BD. Mais le rapport de AC à AB étant donné, celui de AD à BD l'est également; comme d'ailleurs AB est donné, il est facile de déterminer le point D.

SYNTHÈSE.

Divisez AB en deux parties qui soient entre elles dans le rapport de AC à AB, et le point de division D satisfera aux conditions du problème.

Deuxième cas. Quand le point D est entre B et C (*fig.* 15).

ANALYSE.

Faites DE = AD, et puisque $\overline{AD}^2 = CD \times BD$, il est clair que CD :AD ou DE::AD:BD, et par conséquent CE:DE::AB:BD ou CE:AB::DE:BD::2DE ou AE:2BD, ou bien encore CE:AB ::CE+AE ou AC:AB+2BD ou BE, et conséquemment $CE \times BE = AB \times AC$. Le second de ces rectangles étant donné, le premier l'est pareillement, et puisque d'ailleurs BC est connu, il est facile de déterminer le point E, et par suite le point D milieu de AE.

SYNTHÈSE.

Partagez BC au point E en deux portions telles que $CE \times BE = AB \times AC$, et prenez le milieu D de AE; vous aurez alors $\overline{AD}^2 = CD \times BD$.

En effet, puisque $CE \times BE = AB \times AC$, il est évident que CE :AB::AC:BE, d'où CE:AB::AE:2BD ou::DE:BD; ainsi en changeant l'ordre des moyens, CE:DE::AB:BD, et par conséquent CD:DE ou AD::AD:BD; donc enfin $CD \times BD = \overline{AD}^2$.

Ce dernier cas est évidemment sujet à une limite au-delà de laquelle le problême deviendrait impossible; car le rectangle $AB \times AC$ étant égal, par construction, au rectangle $CE \times BE$, il ne doit pas excéder la plus grande valeur dont ce dernier est susceptible, c'est-à-dire le

quarré de $\frac{1}{2}$ BC. La limite a donc lieu quand le point E coïncide avec O milieu de BC; alors il arrive que $AB \times AC = \overline{BO}^2$ ou bien que $AB \times AC + \overline{BO}^2 = 2\overline{BO}^2 = \overline{AO}^2$; par conséquent AO est la diagonale du quarré décrit sur BO. Dans ce cas, $AB:BC::\sqrt{2}-1:2$ ou $::1:2+\sqrt{8}$; c'est-à-dire que le rapport de AB à BC est à son *maximum*, lorsqu'il est égal au rapport de la moitié du côté d'un quarré à la somme de ce côté et de la diagonale.

PROPOSITION XVI.

PROBLÊME.

Etant donnés trois points sur une même ligne droite, on propose d'en trouver un quatrième tel que le quarré de sa distance au premier point soit dans un rapport donné avec le rectangle de ses distances aux deux autres.

Soit proposé de trouver un point D (*fig.* 16) tel que $\overline{AD}^2$ soit à $CD \times DB$ dans le rapport de M à N.

Premier cas. Quand le point D est entre A et B.

ANALYSE.

Sur BC décrivez un demi-cercle, et menez-lui la tangente DE; alors $\overline{DE}^2 = CD \times DB$, et par conséquent le quarré de AD est à celui de DE dans le rapport donné de M à N. Menez le rayon EF, et prolongez ED jusqu'en G à la rencontre d'une perpendiculaire AG sur AC. Les triangles ADG et EDF ainsi formés sont évidemment semblables, et $AD:DE::AG:EF$; le rapport de AD à DE étant connu, celui de AG à EF l'est pareillement, et puisque le rayon EF est donné, AG et le point G sont déterminés; donc la tangente GE et son intersection D avec AC sont aussi déterminées.

SYNTHÈSE.

Prenez une moyenne proportionnelle O entre M et N; sur BC,

décrivez un demi-cercle, et élevez au point A sur AC une perpendiculaire AG d'une longueur telle que l'on ait O:M::EF:AG; si vous menez par le point G une tangente GDE, son intersection D avec AC sera le point cherché.

En effet, en vertu de la similitude des triangles DAG et DEF, AD:DE::AG:EF ou::M:O; donc $\overline{AD}^2:\overline{DE}^2::M^2:O^2$ ou bien $\overline{AD}^2:\overline{DE}^2::M:N$; mais $\overline{DE}^2=CD\times DB$, par conséquent $\overline{AD}^2:CD\times DB::M:N$.

DEUXIÈME CAS. Quand le point D est entre B et C (*fig.* 16 *bis*).

ANALYSE.

Sur BC décrivez un demi-cercle, menez DF perpendiculaire au diamètre et rencontrant la circonférence en F, et tirez AF.

Puisque $BD\times DC=\overline{DF}^2$, le rapport de $\overline{AD}^2$ à $\overline{DF}^2$, et par conséquent celui de AD à DF est déterminé; mais l'angle ADF compris entre ces côtés est donné puisqu'il est droit, d'où il suit que le triangle AFD est donné d'espèce. Ainsi l'angle DAF est déterminé, et la droite AF est donnée de position; il en est donc de même du point F ou F′ où elle coupe la circonférence, de la perpendiculaire FD ou F′D′, et du point D ou D′.

SYNTHÈSE.

Prenez une moyenne proportionnelle O entre M et N, et élevez la perpendiculaire CE, telle que l'on ait M:O::AC:CE; tirez ensuite la droite AE; par les points F ou F′ où elle rencontre le demi-cercle décrit sur BC, abaissez les perpendiculaires FD ou F′D, vous aurez alors $M:N::\overline{AD}^2:BD\times DC$ ou $::\overline{AD'}^2:BD'\times D'O$.

En effet la similitude évidente des triangles ACE et ADF prouve que AC:CE::AD:DF, et que $\overline{AC}^2:\overline{CE}^2::\overline{AD}^2:\overline{DF}^2$; mais $M:N::M^2:O^2$ ou $::\overline{AC}^2:\overline{CE}^2$; par conséquent $\overline{AD}^2:\overline{DF}^2=BD\times DC::M:N$.

Ce problême exige évidemment une certaine relation entre les données, au-delà de laquelle il deviendrait impossible; cette impos-

sibilité aurait lieu si la ligne AE s'écartait tellement de AC qu'elle ne rencontrât plus la circonférence. La limite arrive donc quand AE touche le cercle. Alors le rapport de AC à CE ou de AD à DF sera le même que celui de la tangente menée par le point A au rayon HB; par conséquent le rapport-limite est le quarré de celui-ci, c'est-à-dire que le rapport de M à N, lorsque ces deux quantités approchent le plus de l'égalité, est au plus égal au rapport de $AB \times AC$, ou de $\overline{AH}^2 - \overline{HB}^2$ à $\overline{HB}^2$.

Troisième cas. Quand le point D est au-delà des points B et C, (*fig.* 16 *ter*).

ANALYSE.

Sur BC décrivez un demi-cercle, menez la tangente DE, et prolongez-la jusqu'à la rencontre de la perpendiculaire AG; tirez EF.

Puisque $BD \times DC = \overline{DE}^2$, le rapport de $\overline{AD}^2$ à $\overline{DE}^2$ est donné, et aussi donc celui de AD à DE. Mais les triangles DGA et DEF sont semblables comme rectangles l'un et l'autre et ayant de plus un angle commun; donc $AD:DE::AG:EF$, et puisque le rapport de AD à DE est connu, il en est de même de celui de AG à EF; EF qui est la moitié de BC étant évidemment donné, AG et le point G sont déterminés, et par suite la tangente GE et son intersection D avec AC.

SYNTHÈSE.

Prenez toujours une moyenne proportionnelle O entre M et N; faites de plus que AG soit à EF comme M est à O; et par le point G ainsi déterminé, menez la tangente GED; D sera le point cherché.

Pour le prouver, tirez le rayon EF. Les triangles ADG et EDF étant semblables, $AG:EF::AD:ED$, mais $AG:EF::M:O$, donc $M:O::AD:ED$, et $M^2:O^2::\overline{ED}^2:\overline{ED}^2$, d'où $M:N::\overline{AD}^2:\overline{ED}^2$ ou :: $\overline{AD}^2:BD \times DC$.

PROPOSITION XVII.

PROBLÈME.

Étant donnés quatre points sur une même ligne droite, on propose

d'en trouver un cinquième tel que le rectangle de ses distances aux deux premiers soit dans un rapport donné avec le rectangle de ses distances aux deux autres.

Il faut trouver un point E (*fig*. 17, *que le lecteur est prié de faire*) tel que $AE \times EB : DE \times EC :: M : N$.

PREMIER CAS. M et N étant égaux.

ANALYSE.

Puisque $AE \times EB = DE \times EC$, il est clair que $AE : CE :: DE : EB$; d'où $AC : BD :: CE : EB$ et $AC + BD : BD :: BC : EB$; mais le rapport de $AC + BD$ à BD est donné, il en est donc de même de celui de EB à BC; ainsi BE et le point E sont déterminés.

SYNTHÈSE.

Le point E sera le point cherché si vous le prenez de manière que $AC + BD : BD :: BC : EB$. Car il est clair qu'alors $AC : BD :: CE : BE$, et que $AE : ED :: CE : EB$, d'où $AE \times EB = DE \times EC$.

DEUXIÈME CAS. M et N étant inégaux.

ANALYSE.

Cherchez par la construction précédente un point F tel que $AF \times FB = DF \times FC$.

Puisque $AE \times EB : DE \times EC :: M : N$, il s'ensuit que $AE \times EB : AE \times EB - DE \times EC :: M : M - N$; mais $AE \times EB - DE \times EC = (AE \times EB - AF \times FB) + (DF \times FC - DE \times EC)$ (1) $= EF\,(AF + BE) + EF\,(DF + CE) = EF\,(AD + BC)$. Donc $AE \times EB : EF\,(AD + BC) :: M : M - N$; par conséquent le point E sera déterminé au moyen de la proposition XIV de ce livre, pag. 84 (2).

---

(1) $AE = AF + EF$; $BF = BE - EF$; $CF = CE + EF$; $DE = DF - EF$.

(2) La question est ramenée à celle-ci : étant donnés trois points A, B, F d'une droite, trouver un 4e point E, tel qu'en faisant $AE + BC = G$, on ait; $EF \times G : AE \times EB :: M - N : N$.

La résolution synthétique de ce problême est aisée à déduire de ce qui précède.

PROPOSITION XVIII.

PROBLÊME.

Etant donné quatre points sur une même ligne droite, on propose d'en trouver un cinquième tel que le rectangle de ses distances aux deux points extrêmes soit dans un rapport donné avec le rectangle de ses distances aux deux points moyens.

Soit proposé de trouver un point E (*fig.* 18, *que le lecteur est prié de faire*) tel que AE×ED:BE×EC::M:N.

Premier cas. Supposez AB = CD.

ANALYSE.

A cause de ED=CD+EC et de AC=AB+BE+EC, on a AE×ED = (AB+BE) (AB+EC) = AB×AC + BE×EC, donc AE×ED:AB×AC::M:M—N. Par conséquent le rapport de AE×ED à AB×AC est donné, et aussi le rectangle de AE et ED; comme ces deux lignes AE, ED sont d'ailleurs les deux segments d'une droite connue AD, il est clair que l'on a ce qu'il faut pour déterminer le point E.

SYNTHÈSE.

Faites M — N:M::AB:P, et coupez AD en E ou E′ de façon que AE×ED=P×AC; E est le point cherché. Car, par construction, M:M—N::P:AB, donc M:M—N::P×AC ou AE×ED:AB×AC, d'où il résulte que M:N::AE×ED:AE×ED—BA×AC, ou::AE×ED:BE×EC..

Deuxième cas. Supposez AB et CD inégaux (*fig.* 18).

ANALYSE.

Il est clair que AE×ED = (BE+AB) (EC+CD)=BE×EC +BE×CD + AB×ED; donc AE×ED—BE×EC = BE×CD +ED×AB=BD×CD — ED×CD+AB×ED=BD×CD + (AB

— CD) ED. Prolongez AD jusqu'en un point F tel que (AB — CD) × DF = BD × CD; ce point est connu, puisque AB, CD, BD sont donnés. Par cette construction, AE × ED — BE × EC = (AB — CD) (DF + ED) = (AB — CD) EF.

Maintenant, comme le rapport de AE × ED à BE × EC est donné, il en est de même du rapport de AE × ED à (AB — CD) DF; de plus (AB — CD) étant donné ainsi que les points A, C, F, on déterminera les points F et E par la proposition XIV de ce second livre, page 84.

Au moyen de cette proposition, on obtiendra aisément la construction cherchée.

Il reste encore à assigner les cas extrêmes de ce problême. Pour cela, décrivez sur AD (*fig.* 18 *bis*), comme diamètre, une circonférence de ce cercle; élevez les perpendiculaires BI et GCH; tirez la droite IOH, et menez-lui par le point cherché E la parallèle KEL; tirez OG, EG, ensuite IE que vous prolongerez jusqu'à la circonférence en M; joignez enfin le point M aux points L et G.

Le point O est évidemment donné. De plus, le rapport de AE × ED à BE × EC peut être considéré comme composé de celui de AE × ED ou IE × EM à KE × EL, et de celui de KE × EL à BE × EC.

Maintenant, puisque BK et CL sont parallèles, KE:EL::BE:EC, ou KE:BE::EL:EC, et par conséquent $\overline{KE}^2:\overline{BE}^2$::KE × EL:BE × EC. De plus, KE et IO étant aussi parallèles, KE:BE::IO:BO, d'où $\overline{KE}^2:\overline{BE}^2::\overline{IO}^2:\overline{BO}^2$. Donc $\overline{IO}^2:\overline{BO}^2$::KE × EL:BE × EC, et conséquemment le rapport des deux rectangles KE × EL et BE × EC est donné; supposez qu'il soit égal à celui des deux lignes PQ et ST.

L'angle MGL étant égal à MIG comme inscrit dans le même segment, est aussi égal à l'angle intérieur MEL, et par conséquent le quadrilatère MGEL est inscriptible dans un cercle, ce qui prouve que l'angle LME est égal à LGE. Menez la droite LN sous une inclinaison MLN égale à CGO. Les triangles GOC et HOC sont évidemment égaux; donc l'angle CGO = CHO = CLE = EKI. Par conséquent

les triangles IEK et LEN sont semblables, et IE:KE::EL:EN, donc KE × EL = IE × EN. Prenez ensuite PR de façon que PR:PQ::EM :EN. Le rapport de IE × EM à KE × EL devient celui de IE × EM à IE × EN ou de EM à EN; donc le rapport de AE × ED à BE × EC est composé de celui de PR à PQ, et de celui de PQ à ST, c'est-à-dire qu'il est égal à celui de PR à ST. Mais que le point de section E vienne à se rapprocher de O, alors l'angle EGO ou MLN diminuera évidemment, et par suite le point N s'approchera de M d'une quantité correspondante. Ainsi le terme extrême que PR ne peut jamais dépasser, c'est PQ; donc le rapport des rectangles AE × ED et BE × EC, a pour limite celui de PQ à ST, ou de $\overline{IO}^2$ à $\overline{BO}^2$.

Le point O, qui est la limite des points de section E, peut aisément être déterminé. Puisque BI et CH sont parallèles, BI:CH::BO:OC, et $\overline{BI}^2$ ou AB × BD:$\overline{CH}^2$ ou AC × CD::$\overline{BO}^2$:$\overline{CO}^2$. Ainsi pour obtenir le point O, il faut diviser BC en deux segments qui soient en raison sous-doublée du rectangle AB × BD à AC × CD, ce qui s'exécutera par la proposition XIV du premier livre, page 47.

Mais la limite que nous venons de connaître peut être trouvée plus directement. En effet, joignez IG et menez à cette ligne la perpendiculaire DV; tirez ensuite les droites DG, DI, CV et BV, et après avoir mené le diamètre IZ, joignez le point Z au point G. Les angles DGC et DIV ayant chacun pour mesure la moitié de l'arc DH ou de son égal GD, sont égaux; de plus, les quadrilatères BIVD et GCVD sont inscriptibles dans un cercle, puisque leurs angles opposés B, V, et C, V, sont droits; donc l'angle DGC est égal à DVC, et DIV est égal à DBV; conséquemment les angles DVC et DBV sont égaux. Il résulte de-là que les triangles CDV et VDB sont semblables, puisqu'ils ont en outre un angle commun; ainsi BD :DV::DV:DC, et BD × DC = $\overline{DV}^2$. Mais, d'un autre côté, $\overline{DG}^2$ = AD × DC, donc $\overline{DG}^2 - \overline{DV}^2$ ou $\overline{GV}^2$ = AD × DC − BD × DC = AB × DC. De la même manière il est visible que $\overline{IV}^2$ = AC × BD. Par conséquent la distance IG est déterminée, puisqu'elle est la différence entre

les côtés de deux quarrés qui sont respectivement égaux aux rectangles $AC \times DB$, $AB \times DC$. De plus, l'angle BIO étant égal à GHI, il l'est aussi à GZI; et comme aussi l'angle droit OBI est égal à IGZ, il s'ensuit que les triangles IOB et ZIG sont semblables, et que IO :BO::IZ ou AD:IG. Ainsi la limite du rapport de $AE \times ED$ à $BE \times EC$, c'est-à-dire la valeur de ce rapport à l'état de *minimum* est égale au quarré du rapport de AD à la différence des côtés de deux quarrés respectivement égaux aux rectangles $AC \times DB$ et $AB \times DC$.

PROPOSITION XIX.

PROBLÊME.

Par un point donné, mener une droite telle que la partie interceptée dans une circonférence donnée soit égale à une ligne donnée.

Soit A (*fig.* 19) un point par lequel il faut mener une droite HI, terminée à la circonférence, et égale à B.

ANALYSE.

On sait que dans un cercle toutes les cordes d'égale longueur s'écartent également du centre; si donc on inscrit une corde DE égale à B, il est clair que la corde cherchée doit être distante du centre d'une quantité égale à CF. Par conséquent cette corde doit être tangente à la circonférence décrite du centre C avec le rayon CF. Le point A étant donné, la tangente AG à ce cercle est donc connue, et HI est déterminé.

SYNTHÈSE.

Portez une corde DE égale à B, par C abaissez sur cette corde la perpendiculaire CF, et avec CF pour rayon décrivez un cercle concentrique au cercle donné; la tangente HAI à ce cercle est la droite cherchée. Car il est évident que les cordes HI et DE étant distantes du centre, sont chacune égales à B (1).

---

(1) Ce problême est susceptible d'un *minimum* qu'il est facile d'obtenir, c'est-à-dire

PROPOSITION XX.

PROBLÈME.

Par un point donné, mener une droite telle que la partie de cette droite comprise entre deux circonférences concentriques, soit d'une longueur donnée.

Soit proposé (*fig.* 20) de mener, par A, la droite ABC, de manière que la partie BC interceptée par les deux cercles concentriques HECM et IFBL soit égale à D.

ANALYSE.

Par un point quelconque H, pris sur l'une des circonférences données, menez la corde HM = EC, et abaissez sur les droites les perpendiculaires OK et OG. Les cordes égales HM et EC sont équidistantes du centre, et par la propriété réciproque IL est égale à BF; conséquemment les moitiés de ces lignes sont égales, c'est-à-dire que HK = GC et IK = GB; donc HI est égal à BC, et est ainsi donné. Il suit de-là que le point I et la corde HM sont pareillement déterminés; il en est donc de même de AGC qui touche le cercle OKG auquel la droite HM est tangente.

SYNTHÈSE.

Par un point H pris à volonté sur l'une des circonférences, menez une droite HIM telle que la partie HI soit égale à D; abaissez sur cette droite la perpendiculaire OK, et prenant OK pour rayon décrivez du point O un cercle auquel vous menerez la tangente ABC;

---

qu'on peut aisément trouver la construction nécessaire pour que la corde HI soit la plus petite possible. En effet, pour que HI soit un *minimum*, il faut que GC soit un *maximum;* or GC ne peut jamais devenir plus grand que AC, mais il peut lui être égal; donc le *maximum* de GC, et le *minimum* de HI, ont lieu quand le point G se confond avec A, c'est-à-dire quand la corde cherchée est perpendiculaire à AC, qui est une droite donnée.

(*Note du traducteur.*)

cette tangente satisfera aux conditions du problême. Car les cordes EC et FB sont égales respectivement aux cordes HM et IL équidistantes du centre; donc leurs moitiés sont égales, c'est-à-dire que GC = HK, et GB = IK, d'où HI = D.

Il est évident que l'intervalle BC entre les deux cercles concentriques sera à son *minimum* quand AC passera par le centre, et à son *maximum* lorsque AC sera tangent au cercle intérieur. Ainsi la ligne donnée D est renfermée entre deux limites; elle ne peut être plus grande que la racine quarrée de la différence des quarrés de ces rayons.

PROPOSITION XXI.

PROBLÊME.

Etant donnés deux cercles quelconques, et un point sur la droite qui joint leurs centres, tel que les distances de ce point aux centres des cercles soient proportionnelles à leurs rayons, on propose de mener une autre droite dont la partie interceptée par les deux circonférences, ait une longueur donnée.

Soient D, E (*fig.* 21) les centres des deux cercles, et supposez que le point A de la droite DE soit placé de manière que l'on ait AD AE : : DI : EK; il est question de mener par ce point A, la droite ABC telle que BC soit égal à L.

ANALYSE.

Tirez les lignes BD et CE. Puisque AD : AE : : DI ou DB : EK ou EC, il s'ensuit que DB est parallèle à EC; donc AD : DE : : AB : BC, et puisque AD et DE sont donnés ainsi que BC qui est égal à L, il s'ensuit que AB est déterminé tant en position qu'en grandeur.

SYNTHÈSE.

Prenez une ligne M telle que EK — DI : DI : : L : M, et par le point A menez AB égale à M; ABC est la droite cherchée.

Car, par hypothèse, AD:AE::DI ou DB:EK ou EC; donc DB est parallèle à EC, et en conséquence DB ou DI:EC ou EK ::AB:AC, ainsi EK — DI:DI::BC:AB; mais EK — DI:DI ::L:M, ou, ::L:AB, donc enfin BC:AB::L:AB; d'où il suit que BC = L.

PROPOSITION XXII.

PROBLÊME.

Deux cercles dont l'un est intérieur à l'autre étant donnés, mener, par un point donné sur la circonférence du plus petit, et sur la droite qui joint les deux centres, une droite telle que la partie comprise entre les deux circonférences, soit d'une longueur donnée.

Il faut mener ABC (*fig.* 22) de manière que la portion interceptée BC soit égale à QR.

ANALYSE.

Tirez les lignes BG, CH et FP, et par le centre E du grand cercle abaissez sur AC la perpendiculaire EI; prenez ensuite IL = BI, et menez la parallèle IK à BG. Sur le prolongement de AH, portez une quatrième proportionnelle AM aux lignes AK, AG, AF, et par le point M menez MN parallèle à FP, et rencontrant en N le prolongement de AC.

De ce que LK est parallèle à BG, et FP à MN, il suit que AK :AG::AL:AB, et AF:AM::AP:AN; mais, par construction, AK :AG::AF:AM, donc AK:AG::AL:AB::AP:AN. Il suit de-là que AK:AG::AL+AP ou PL:AB+AN ou BN. Mais IP = IC, et IL = IB, donc PL = BC = QR. A cause du parallélisme des droites LK, IE et BG, KE est égal à EG, et conséquemment AK est donné; il en résulte que les trois premiers termes de la proportion étant déterminés, le quatrième ou BN l'est également. Mais, de plus, ACH = AFP = AMN; donc les triangles CAH et ANM qui ont en outre un angle commun, sont semblables; par conséquent AH:AC::AN:AM, et AH × AM = AC × AN. Par ce dernier résultat

on voit que l'on connaît le rectangle des segments AN, AC dans lesquels est partagée la ligne CN déja déterminée; donc AC est connu tant en position qu'en grandeur.

SYNTHÈSE.

Après avoir pris KE = EG, portez de A en M une quatrième proportionnelle aux droites AK, AG et AF, prenez deux lignes QR et QS qui soient entre elles dans le rapport de AK à AG; partagez au point O la droite SR en deux segments tels que SO × OR = AH × AM, et enfin menez par le point donné A jusqu'à la circonférence du grand cercle, une droite AC = OR; ce sera la ligne demandée.

Pour le démontrer, tirez les droites CH, BG et FP, menez MN parallèle à FP et EI, KL parallèles à CH. Puisque IL = IB et IP = IC, PL est égal à BC. Les triangles CAH et ANM sont semblables, et par conséquent AH:AC::AN:AM, d'où AH × AM = AC × AN; mais, par construction, AH × AM = SO × OR, et AC = OR, donc AN = SO. Maintenant, par la propriété des parallèles, AK:AG::AL:AB, et, par hypothèse, AK:AG::AF:AM ou::AP :AN, donc AK:AG::(AL+AP) ou BC:(AN+AB) ou BN. Il suit de-là que BC:BN::QR:QS, et que BC:CN::QR:SR; mais CN = SR, donc BC = QR, c'est-à-dire la ligne donnée.

PROPOSITION XXIII.

PROBLÊME.

Par l'extrémité du diamètre d'un cercle donné, mener une droite telle que la partie interceptée entre la circonférence et une perpendiculaire au diamètre soit d'une longueur donnée.

Il est question de mener par A (*fig.* 23) la droite AC, de manière que la portion BC soit égale à GH.

ANALYSE.

Menez BD; l'angle ABD ayant son sommet à la circonférence, et ses extrémités appuyées sur un diamètre, est droit, et il est par conséquent égal à AEC. Ainsi les triangles DAB et CAE qui ont en outre un angle commun A sont semblables, et AB:AD::AE:AC, donc $AB \times AC = AD \times AE$. Mais le rectangle $AD \times AE$ est connu, ainsi il en est de même de $AB \times AC$; et puisque d'ailleurs BC est donné, AB se trouve déterminé de grandeur, et par conséquent aussi de position.

SYNTHÈSE.

Prolongez GH d'une quantité HI telle que $GI \times IH = AD \times AE$, et portez dans le cercle une corde AB égale à IH; ce sera la droite cherchée. Car si vous menez BD, la similitude évidente des triangles ABD et AEC vous fournira la proportion, AB:AD::AE:AC, d'où vous déduirez l'équation $AB \times AC = AD \times AE = GI \times IH$; or $AB = IH$, donc $AC = GI$ et $BC = GH$.

PROPOSITION XXIV.

PROBLÊME.

Par un point donné sur la droite qui divise un angle en deux parties égales, mener une autre droite telle que la portion comprise entre les deux côtés de l'angle soit d'une longueur donnée.

Par le point D (*fig.* 24) situé sur la droite AD qui divise l'angle BAC en deux parties égales, il faut mener BC égale à une ligne donnée.

ANALYSE.

Faites passer un cercle par les trois points A, B, C, menez le diamètre EF et la droite AF. Il est clair que ce cercle, et par conséquent le triangle BAC, sont donnés de grandeur, puisqu'on donne BC et

l'angle BAC; on trouvera cette grandeur en décrivant sur BC un segment capable de l'angle BAC; mais, puisque l'angle BAE est égal à CAE, l'arc BE est égal à CE, et le diamètre EF tombe perpendiculairement sur le milieu de CB. AD étant donné, AE par la dernière proposition, est déterminé de grandeur; donc DB est connu en grandeur et aussi en position.

SYNTHÈSE:

Sur la ligne donnée décrivez un cercle capable de l'angle BAC, partagez l'arc BC en deux portions égales au point E, et par ce point menez, au moyen de la dernière proposition, la droite EAD telle que AD soit égale à la distance du point donné au sommet de l'angle donné. BD, CD seront les deux segments de la droite demandée, à l'aide desquels sa position est immédiatement déterminée.

Car l'angle BAC est égal à l'angle donné, et AD le divise en deux parties égales, puisque l'arc BE=CE; d'ailleurs AD est égale à la distance du point donné au sommet de triangle, et BC est égal à la ligne donnée. Dans la figure ainsi construite, on a donc satisfait à toutes les conditions du problême.

On sent que ce problême est nécessairement susceptible d'une limite; car il est évident que la ligne donnée BC pourrait être tellement petite qu'elle n'atteignît pas aux côtés de l'angle BAC. La construction précédente indique bien le *minimum* de BC; Car EA ne peut jamais excéder le diamètre EF, et la limite a lieu quand ces deux lignes coïncident; ainsi la ligne BC est à son *minimum* lorsqu'elle est perpendiculaire à AD; on peut remarquer alors que les segments BD, CD sont égaux.

PROPOSITION XXV.

PROBLÊME.

Par le sommet d'un rhombe, mener une droite telle que la partie

comprise entre les deux côtés qu'elle rencontre, soit d'une longueur donnée.

Soit ABCD (*fig.* 25) un rhombe dont le côté BC est prolongé; il faut, par le sommet opposé A, menez AEF de manière que la partie extérieure EF soit égale à une droite donnée.

ANALYSE.

Menez la droite AC, et prolongez-la jusqu'à ce qu'elle rencontre la ligne EG qui fait avec AE un angle AEG égal à ACF. Les triangles CAF et EAG sont évidemment semblables, et AC:CF::AE:EG; mais CE étant parallèle à AB, BC:CF::AE:EF; donc AC:BC::EF:EG, et comme les trois premiers termes de cette proportion sont donnés, le quatrième est déterminé. De plus l'angle ACD est égal à ACB ou à FCG; en ajoutant à chacun de ces angles l'angle ECF, les sommes ACF ou AEG et ECG sont égales. Ainsi les triangles AGE et EGC sont semblables, et AG:EG::EG:GC, ou $\overline{EG}^2 = AG \times GC$. Comme EG a été déterminé plus haut, le rectangle $AG \times GC$ l'est aussi; il en est donc de même du point G, du point E et de la droite AF.

SYNTHÈSE.

Supposez que le segment donné soit égal à K; menez AC, et prenez une quatrième proportionnelle L aux trois lignes AC, BC, K. Ensuite divisez AC au point G en deux parties telles que $AG \times GC = L^2$, et du point G avec le rayon $GE = L$, décrivez un arc de cercle qui coupe CD en E; AEF sera la ligne cherchée.

Car, puisque $AG \times GC = L^2 = \overline{EG}^2$, il s'ensuit que AG:EG::EG:CG, ce qui prouve que les triangles AGE et EGC sont semblables, et que par conséquent l'angle AEG est égal à ECG ou ACF; donc les triangles AEC et AGE sont pareillement semblables, et AC:CF::AE:EG. Mais, d'un autre côté, BC:CF::AE:EF, donc AC:BC::EF:EG. Or on a aussi AC:BC::K:L ou EG; donc $K = EF$.

Autre solution.

ANALYSE.

Menez FG (*fig.* 26 *bis*) faisant l'angle AFG égal à ADC, prenez CH = CE, par C menez CN = CA, et tirez les droites CG et AH.

Le triangle ACN étant isocèle, l'angle CAN est égal à CNA; et puisque la diagonale AC partage en deux portions égales l'angle du rhombe BCD, les triangles ACE et ACH sont égaux, d'où il résulte que AE est égal à AH et que l'angle CAE est égal à CAH. Comme les triangles ADE et AFG sont semblables, AD:AE::AF:AG, et $AD \times AG = AE \times AF$. Mais l'angle ACD = CAD = CNA, donc les triangles ADC et ACN sont semblables, et AN:AC::AC:AD, d'où $AN \times AD = \overline{AC}^2$. De plus, puisque AC divise (1) l'angle HAF en deux parties égales, $FA \times AH = \overline{AC}^2 + FC \times CH$, ou bien $FA \times AE = \overline{AC}^2 + FC \times CE$; donc $FC \times CE = FA \times AE - \overline{AC}^2 = AG \times AD - AD \times NA = NG \times AD$. Mais BA et CE étant parallèles, FC:EF::AD:AE::AF:AG, et CE:EF::AB ou AD:AF; donc $FC \times CE:\overline{EF}^2::AD:AG.:NG \times AD:NG \times AG$, et comme $FC \times CE = NG \times AD$, il s'ensuit que $\overline{EF}^2 = NG \times AG$. Par cette dernière équation, il est visible que AG et le point G sont déterminés; or si sur AG on décrit un segment capable de l'angle AFG = ADC, le point F se trouvera sur l'arc de ce segment; l'intersection de cet arc avec BC fera donc connaître la position du point F, et par suite la droite AF.

SYNTHÈSE.

Soit K la grandeur du segment donné; cherchez une droite L dont le quarré soit équivalent à la somme des quarrés de K et de la diagonale AC; prolongez AD, et par le point C menez CG = L; sur AG décrivez un segment capable de l'angle ADC, joignez A avec le point F où le segment rencontre CB; AF est la ligne cherchée.

(1) A cause des triangles semblables ABC, ACE (*fig.* 24), on a $AB \times AC = AD \times AE = AD \times DE + \overline{AD}^2$; or $AD \times DE = BD \times DC$, donc $AB \times AC = BD \times DC + \overline{AD}^2$.

Pour le prouver menez CN = CA, et tirez GF et AH. Les triangles AHC et AEC sont égaux; en effet l'angle AFG étant égal par construction, à ADC, l'est aussi à l'angle que forme avec AD le prolongement de BA, et conséquemment AB touche le cercle en A; donc l'angle BAH = HFA = DAE, et BAC — BAH ou CAH = DAC — DAE ou CAE; d'ailleurs les angles ACH et ACE sont aussi égaux, et le côté AC est connu aux deux triangles CAH, CAE; l'égalité de ces triangles est donc démontrée, et il en résulte que AH = AE, et CH = CE. D'un autre côté, les triangles ADE et AFG sont semblables, donc $AD:AE::AF:AG$, et $AD \times AG = AE \times AF$. Ensuite, en vertu de la similitude des triangles ANC et ACD, $AN:AC::AC:AD$, et $AN \times AD = \overline{AC}^2$. Mais $FC:EF::AD:AE::AF:AG$, et $CE:EF::AB$ ou $AD:AF$, conséquemment $FC \times CE:\overline{EF}^2::AD:AG::NG \times AD:NG \times AG$. D'ailleurs, puisque AC divise l'angle FAH en deux parties égales $FC \times CH + \overline{AC}^2 = FA \times AH = AG \times AD = AN \times AD + NG \times AD$; il suit de-là que $FC \times CH$ ou $FC \times CE = NG \times AD$, et $\overline{EF}^2 = NG \times AG$. Maintenant $K^2 = \overline{CG}^2 - \overline{AC}^2 = NG \times AG$ (*voyez* note (2), pag. 67); donc EF = K (1).

PROPOSITION XXVI.

PROBLÊME.

Par deux points donnés, faire passer un cercle qui touche une droite donnée de position (2).

---

(1) Pappus, géomètre du milieu du quatrième siècle, nous a transmis les titres des huit sections de la Géométrie des Grecs (voyez l'avant-propos de nos Eléments de Géométrie à trois dimensions, partie algébrique); les problèmes de la cinquième section dite *des inclinaisons*, qui admettent une construction élémentaire, se résolvent au moyen des propositions précédentes 19—25, pages 90—102. La première solution est empruntée de l'analyse géométrique de Omérique Hugo de San Lucar (*vide analysim geometricam, pars prima, de planis, quatuor libri, Cadix* 1698), et la seconde est tirée des œuvres posthumes du célèbre Huygens. La solution du problême général exige l'application des propriétés de la conchoïde.

(2) Ce problême est résolu dans les Eléments de Géométrie de M. Lacroix (pag. 84, 10e édition).

Soit proposé de décrire un cercle qui passe par les points A, B (*fig.* 26), et qui touche la ligne droite CD.

Il peut se présenter évidemment deux cas; celui ou la ligne qui joint les points donnés est parallèle, et celui où elle est inclinée, à CD.

PREMIER CAS. AB parallèle à CD.

ANALYSE.

Puisque CD est une tangente, la perpendiculaire EG menée par le point de contact passe par le centre, elle partage donc en deux portions égales la droite AB parallèle à CD. Il résulte de-là que cette perpendiculaire, et par conséquent le point de contact E, sont déterminés; ainsi le cercle qui passera par A, B et E est le cercle cherché.

SYNTHÈSE.

Menez GE perpendiculaire sur le milieu de AB, et par les trois points A, E, B faites passer un cercle : il touchera la ligne CE. Car GE passe par le centre de cercle, et de plus elle rencontre CD à angles droits.

DEUXIÈME CAS. AB est incliné sur CD (*fig.* 26 *bis*).

ANALYSE.

Prolongez BA jusqu'à la rencontre de CD en F. Alors $\overline{FE}^2 = AF \times FB$; mais le point de concours étant donné, le rectangle $AF \times FB$ est déterminé, par conséquent on a aussi FE et le point E. Il suffira donc de faire passer un cercle par A, B et E.

SYNTHÈSE.

Prolongez BA jusqu'à la rencontre de CD en F, portez sur CD à partir du point F, une moyenne proportionnelle FE ou FE′ entre AF et FB, et par les points A, E, B, faites passer un cercle; il touchera la droite CD.

Car, puisque $AF:FE::FE:FB$, il s'ensuit que $\overline{FE}^2 = AF \times FB$, et par conséquent CD touche le cercle en E.

PROPOSITION XXVII.

PROBLÊME.

Par un point donné, faire passer un cercle tangent à deux droites données.

Soit proposé de décrire un cercle qui passe par le point E (*fig.* 27) et qui touche les droites AB et CD.

Premier cas. Supposez AB parallèle à CD.

ANALYSE.

Par le centre O menez la parallèle FO et la perpendiculaire KI aux deux droites données. Il est évident que le rayon OI est donné, et par conséquent la position de FO l'est aussi; mais le rayon OE ou O′E étant égal à OI, ce rayon et le centre O sont également déterminés.

SYNTHÈSE.

Menez une parallèle FO par le milieu de la distance entre les deux droites données, et du point E avec un rayon égal à la moitié de cette distance, décrivez un arc de cercle qui rencontrera FO en O ou O′; ce point est le centre du cercle cherché. Car OE = OI = OK, et par conséquent le cercle qui passe par E touche CD et AB en K et I.

Deuxième cas. Supposez CD incliné sur AB (*fig.* 27 *bis*).

ANALYSE.

Prolongez les deux droites données jusqu'à leur rencontre en F, tirez les droites OI, OK et OF, et menez par E la ligne EGH perpendiculaire à OF.

Les triangles rectangles OKF et OIF sont égaux, puisque le côté OF leur est commun; et le côté OI est égal à OK; l'angle OFK est donc égal à OFI; et comme le point F est donné, il s'ensuit que la ligne OF est déterminée. Mais d'ailleurs le point E est donné, donc

il en est de même de la perpendiculaire EG, et GH étant égal à GE, il est clair que le point H est déterminé. Maintenant que nous avons deux points H et E par lesquels doit passer la circonférence tangente à AB et CD, elle pourra être décrite par la dernière proposition.

SYNTHÈSE.

Prolongez BA et CD jusqu'à leur rencontre en F, menez FO qui divise l'angle BFD en deux parties égales, et par E abaissez sur cette droite la perpendiculaire EG que vous prolongerez d'une égale quantité au-dessus de OF en H; ensuite cherchez une moyenne proportionnelle LI ou LI′ entre HL et LE, et par les trois points H, E, I, ou H, E, I′, faites passer une circonférence de cercle; elle satisfera aux conditions du problême.

En effet le centre du cercle qui passe par E et par H doit se trouver sur FO qui est perpendiculaire sur le milieu de EH; soit O ce centre, et menez la droite OI et la perpendiculaire OK. Puisque $HL \times LE = \overline{LI}^2$, le cercle touche AB en I, et l'angle OIF est droit; conséquemment les triangles KOF et IOF sont égaux comme ayant d'abord le côté OF commun, et de plus les angles OKF et OFK respectivement égaux à OIF et OFI; ainsi $OI = OK$. Donc le cercle décrit du point O comme centre, avec OI pour rayon, passe par K, et touche CD en ce point.

Corollaire. Si le point donné E se trouvait sur l'une des droites données, sur AB par exemple, il coïnciderait avec le point de contact de AB, et le problême deviendrait fort simple; car le centre O étant toujours sur la ligne FO, il serait déterminé par l'intersection de cette ligne avec la perpendiculaire IO (1).

(1) Le problême qui est présenté dans ce corollaire comme cas particulier de la proposition XXVII, se trouve résolu directement dans les Eléments de Géométrie de M. Lacroix (page 78, 10e édition).

PROPOSITION XXVIII.

PROBLÊME.

Par deux points donnés, faire passer un cercle tangent à un cercle donné.

Il faut décrire un cercle qui passe par les points A et B (*fig.* 28), et qui touche un autre cercle dont le centre est C.

ANALYSE.

Par D point de contact des deux cercles, menez ADE et BDF, tirez EF; par F, menez la tangente FG, et tirez le diamètre BHCI.

Puisque FG touche le cercle donné, l'angle BFG est égal à FED, et par conséquent à BAD, puisque FE et AB sont évidemment parallèles; mais les triangles BGF et BDA ont en outre un angle commun en B, ils sont donc semblables, et BF:BG::BA:BD, d'où BA×BG=BF×BD=BI×BH. Or BI et BH sont donnés, donc le rectangle BA×BG est déterminé, et conséquemment on peut connaître la position du point G. Ainsi la tangente GF, la droite BF, et par suite le point D sont déterminés; on peut donc décrire le cercle cherché dont on connaît trois points A, B, D.

SYNTHÈSE.

Portez de B en G une quatrième proportionnelle aux lignes BA, BI, BH, menez la tangente GF, tirez la droite FB qui coupe en D la circonférence donnée, et faites passer un cercle par les trois points A, B, D; ce sera le cercle cherché.

Pour le démontrer, il suffit de mener ADE, FE et le diamètre BHCI. Puisque BA:BI::BH:BG, BA×BG=BI×BH=BF×BD; donc BF:BG::BA:BD, et par conséquent les triangles BGF et BDA ayant un angle commun compris entre des côtés proportion-

nels sont semblables; d'où il résulte que l'angle BFG est égal à BAD. Mais BFG est égal à FED, ainsi les angles alternes BAE et FEA sont égaux, ce qui prouve que FE est parallèle à AB; d'où il suit que les deux cercles DEF, ABD se touchent en D.

PROPOSITION XXIX.

PROBLÊME.

Par un point donné, faire passer un cercle tangent à un cercle donné et à une droite donnée de position.

Il faut décrire un cercle qui passe par le point A, et qui touche, 1° la droite CD (*fig.* 29); 2° le cercle dont le centre est B.

ANALYSE.

Par le centre du cercle donné, abaissez la perpendiculaire EBG, menez la droite EI et prolongez-la jusqu'à la ligne CD en H; tirez les droites FIK et HK.

L'angle HIK étant égal à l'angle droit EIF, est droit aussi, et par conséquent HK est le diamètre du cercle ILA, et H le point de contact de ce cercle et de la droite CD. Les triangles HEG et FEI sont donc semblables, et HE:EG::EF:EI, d'où $HE \times EI = EG \times EF$. Menez la droite ELA, alors $AE \times EL = HE \times EI = EG \times EF$; mais le rectangle $EG \times EF$ est donné, il en est donc de même de $EH \times EI$, de EL, et du point L. Maintenant que l'on connaît deux points A, L du cercle cherché, et une tangente donnée, le problême se résoudra comme il a été dit proposition 26, pag. 102.

SYNTHÈSE.

Tirez EA, menez la perpendiculaire EG, prenez une quatrième proportionnelle EL aux lignes AE, EG, EF, et par la proposition 26, page 102, décrivez un cercle qui passe par les deux points A, L et qui touche la droite CD; il touchera aussi le cercle donné.

Pour le prouver, menez le diamètre HK, la droite EH qui coupe en I la circonférence EIF, et la droite FIK jusqu'à la rencontre de HK.

Les triangles HEG et FEI étant évidemment semblables, HE:EG::EF:EI, et HE×EI=EG×EF; mais AE:EG::EF:EL, d'où AE×EL=EG×EF; donc HE×EI=AE×EL, ce qui montre que le point I est situé sur la circonférence HIK. D'où il suit que les deux cercles se touchent en ce point I; et en effet, il sont en ce point la même tangente, puisque si l'on concevait une tangente à chacun d'eux menée par I, les angles que ces deux tangentes formeraient avec IF et IK seraient respectivement égaux à IEF et IHK, et par conséquent égaux entre eux, puisque EF et HK sont parallèles; ainsi ces deux tangentes se confondent en une seule.

Corollaire. Le problème serait considérablement simplifié, si le point donné se trouvait sur la ligne droite ou sur le cercle; il coïnciderait alors avec l'un ou l'autre des points de contact H ou I; dans ce cas, après avoir mené EIH et FIK, la perpendiculaire HK déterminerait le diamètre du cercle cherché.

PROPOSITION XXX.

PROBLÊME.

Par un point donné, faire passer un cercle tangent à deux cercles donnés.

Soit proposé de trouver le centre O d'un cercle qui passe par le point C (*fig.* 30), et qui touche deux cercles dont A et B sont les centres.

ANALYSE.

Tirez la droite AB, et continuez-la jusqu'à ce qu'elle rencontre le prolongement de celle qui joint les deux points de contact E et F; menez OA et OB, AG et BH, et CEI, prolongez IG et DC jusqu'à leur intersection mutuelle en K.

Les triangles isocèles EOF, EAG et FBH sont évidemment semblables; donc AG est parallèle à BF, et AE l'est à BH. Il en résulte que AE:BH::AD:BD; et comme le rapport de cette proportion est connu, le point D est déterminé. De plus, AG:BF::DG:DF, et DG:DF::DK:DC, car en vertu du contact des cercles O et A, la ligne IG est parallèle à FC. Comme le point D et CD sont déterminés, il suit des proportions précédentes que DK et le point K sont également connus. Il suit de-là et de la proposition 17 du premier livre, page 52, que la droite GE comprise entre les droites KI et CI, et passant par le point donné D, est déterminée de position; donc AEO est aussi déterminée de position. Maintenant si vous menez OC, il est clair que l'angle OCE est connu puisqu'il est égal à CED; d'où il suit que la droite CO et le centre O sont aussi connus.

SYNTHÈSE.

Prenez le point D de manière que AE:BH::AB:BD, menez CD, et portez de D en K sur CD, une quatrième proportionnelle DK aux lignes BH, AE, et DC; ensuite, par les points K et C, menez KI et CI de manière que GE prolongé passe par D, ce que vous exécuterez au moyen de la proposition 17 du premier livre; cela fait, construisez sur la base EC un triangle isocèle dont un des côtés soit dans le prolongement de AE; le sommet O de ce triangle est le centre du cercle cherché.

Pour le démontrer, menez les droites AG, GF, OB et BH. Puisque AE ou AG:BH ou BF::AD:BD, et que les triangles ADG et BDF ont un angle commun en D, ils sont semblables, et AD:BD::DG:DF::DK:DC, ce qui prouve que IG est parallèle à FC, et par conséquent les cercles O et A se touchent en E. Mais le triangle BFH est isocèle, car ses côtés BF et BH sont respectivement parallèles aux côtés AG et AE du triangle isocèle GAE; donc les cercles O et B se rencontrent au point F, et comme BH est parallèle à EO, ce

point est un point de contact. De plus, l'angle ECO étant égal à CEO, le côté OE est égal à OC; en conséquence le cercle décrit du centre O et qui passe par E et par F, passe aussi par C.

Autre solution.

ANALYSE.

Joignez les centres A, B, O (*fig.* 30), prolongez AB jusqu'à la rencontre en D de la droite qui unit les deux points de contact E, F; tirez les droites BH et CD, et prolongez cette dernière jusqu'à ce qu'elle coupe le cercle en L.

Puisque les triangles EOF et FBH sont isocèles, les angles OFE et BFH sont respectivement égaux aux angles OEF et BHF, lesquels sont par conséquent égaux entre eux, d'où il suit que EO est parallèle à BH, et que AE:BH::DA:DB, ce qui prouve que le point D est déterminé. De plus DA:DB::DE:DH ou::DE×DF:DH ×DF; mais le rectangle DH×DF est connu, puisqu'il équivaut au rectangle des segments interceptés sur BD par le cercle B, donc les rectangles DE×DF et DC×DL, sont déterminés; comme DC est donné, on voit que DL et le point L le sont aussi. Le problême est alors ramené à la proposition 28 de ce livre, page 106.

SYNTHÈSE.

Prenez le point D de manière que AE:BH::AD:BD, menez la droite DC et prolongez-la d'une quantité CL, telle que le rectangle DC×DL soit dans le rapport de AE à BH avec le rectangle formé par les deux parties d'une sécante menée par D au cercle BD; décrivez ensuite un cercle qui passe par les points C et L et qui touche le cercle A; il sera aussi tangent au cercle B.

En effet tirez les droites OA, OB, EH, et menez BH parallèle à AO. Puisque AE:BH::AD:BD, il est évident que EH prolongé rencontrera AD en D; donc AE:BH::DE:DH ou::DE×DF:DH ×DF; mais, par construction, AE:BH::DC×DL:DH×DF, donc

$DC \times DL = DE \times DF$, d'où il résulte que le point F est sur la circonférence O. Donc le triangle EOF est isocèle, et il en doit être de même de HBF qui lui est semblable; ainsi F appartient aussi au cercle B, et il est le point de contact des cercles B et O.

Si L coïncidait avec le point C, la construction s'effectuerait par le corollaire de la proposition précédente.

PROPOSITION XXXI.

PROBLÊME.

Décrire un cercle tangent à deux droites données, et à un cercle donné.

Soit proposé de décrire un cercle qui touche les lignes AB et CD (*fig.* 31), et un autre cercle dont le centre est E.

ANALYSE.

Menez FE, tirez aux points de contact les droites FH, FI; ensuite du point F pris pour centre, décrivez avec le rayon FE une circonférence de cercle qui rencontrera en K et en L, FI et FH prolongés, et par ces points menez les tangentes MN, OP.

Puisque $FE = FK = LF$, et $FG = FH = FI$, il s'ensuit que $GE = HK = IL$. Mais les tangentes CD et OP étant perpendiculaires à la même droite FK, sont parallèles; et par la même raison AB est parallèle à MN, donc OP et MN sont déterminées de position, et par la proposition 27, page 104, le cercle EKL est connu; il en est donc de même du cercle concentrique GHI.

SYNTHÈSE.

A une distance égale au rayon du cercle donné, menez MN et OP parallèles à AB et CD; ensuite, par la proposition 27 de ce livre, cherchez le centre F d'un cercle qui passe par le point E, et qui touche MN et OP; F est aussi le centre du cercle cherché.

En effet menez FE, FK, et FL. Puisque $GE = HK = IL$, il est

évident que $FG = FH = FI$. Ainsi le cercle est tangent en H et I, car CD et AB sont perpendiculaires respectivement à FK et FL.

Scholie. Les six problêmes précédents sont tous renfermés dans ce problême général : « Trois choses étant données, soit points, ou droites, ou cercles, décrire un cercle déterminé par ces données. » Cet énoncé présente dix cas distincts. Deux de ces cas ont été traités dans les éléments, savoir; celui où il faut faire passer un cercle par trois points, et celui où il est question de décrire un cercle tangent à trois droites. Un principe commun qui se fait remarquer dans toutes les solutions connues, simplifie les conditions du problême, en remplaçant les lignes ou les cercles donnés par des points. Deux cas restent encore à traiter; ce sont, 1° celui où l'on donne trois cercles; 2° celui où l'on donne deux cercles et une droite. Ces deux questions sont aisément ramenées aux cas qui ont été résolus, en faisant usage de moyens analogues à ceux qu'on a employés dans la dernière proposition, c'est-à-dire en menant une parallèle, ou en décrivant un cercle concentrique, à des distances qui selon la position relative des données, doivent être égales ou à la somme ou à la différence des rayons donnés. (1).

---

(1) S'il s'agit du premier cas, c'est-à-dire s'il faut décrire un cercle tangent à trois cercles donnés, voici comment on s'y prendra. Nommons A, B, C les centres des cercles donnés, a, b, c leurs rayons, X le centre du cercle cherché, et x son rayon. Supposons le problême résolu, et décrivons de X comme centre un cercle qui passe par l'un des trois centres donnés par A, par exemple; le rayon de ce cercle sera $x \pm a$, et sa circonférence s'écartera des centres des autres cercles de quantités connues et égales à $b \pm a$ pour l'un, et $c \pm a$ pour l'autre; il suit de-là que si, de B et C pris pour centres, on décrit des cercles qui aient respectivement ces rayons-là, ils seront tangents au cercle auxiliaire que nous avons mené; or il est évident que les deux cercles tangents sont donnés d'après l'énoncé du problême; donc le cercle auxiliaire sera déterminé, puisqu'il devra passer par un point donné A, et être tangent à deux cercles donnés; sa détermination s'effectuera par la proposition 30, page 108. Il est bien clair que de ce cercle on déduira aisément le cercle cherché.

On s'y prendrait d'une manière analogue pour résoudre le second cas. Voyez *la Correspondance sur l'école polytechnique*, par M. Hachette, page 205, tom 3.

LIVRE III.

DÉFINITION.

Si un point change de position suivant une loi déterminée, la ligne qu'il décrit est dite le *lieu* de ce point.

PROPOSITION PREMIÈRE.

THÉORÊME.

Si d'un point donné on mène à une droite donnée des lignes, qui soient divisées dans un rapport connu, le *lieu* des points de division est une autre droite déterminée de position. (*Fig.* 1, *pl.* 3).

Une droite AB menée d'un point fixe A à un point variable B d'une droite donnée BD, est partagé au point C dans un rapport donné; quelle que soit l'inclinaison de AB, le point C se trouvera toujours sur une droite déterminée de position.

ANALYSE.

Par A abaissez la perpendiculaire AD sur BD, et par C menez CE parallèle à BD. Il est évident que AC:AB::AE:AD, et conséquemment le rapport de AE à AD est connu; mais AD est donnée tant de position que de grandeur, ainsi AE et le point E sont donnés, et par conséquent CE qui est perpendiculaire à AD, est déterminée de position.

SYNTHÈSE.

Abaissez la perpendiculaire AD, qui est partagée au point E dans

le rapport donné, et élevez la perpendiculaire CE; cette droite sera le lieu demandé; car, CE étant parallèle à BD, AC:AB::AE:AD.

PROPOSITION II.

THÉORÊME.

Si d'un point donné, on mène à la circonférence d'un cercle aussi donné, des lignes droites, et qu'on les divise dans un rapport connu, le lieu des points de division est une circonférence de cercle déterminé.

Supposez que AB (*fig.* 2), terminée au point A et à une circonférence donnée soit partagée au point C dans un rapport donné; ce point C se trouvera toujours sur une circonférence de cercle déterminé.

ANALYSE.

Joignez le point A avec le centre D du cercle donné, et menez CE parallèle à BD. Il est évident que AC:AB::AE:AD; ainsi le rapport de AE à AD est donné, et par conséquent AE et le point E sont déterminés. De plus, puisque AC:AB::CE:BD, le rapport de CE à BD est connu, et pour chaque position de AB, CE est déterminé de grandeur; et comme BD est une constante, on voit que CE en est une aussi, et par conséquent le point C est toujours situé sur la circonférence d'un cercle décrit de E comme centre avec le rayon connu CE.

SYNTHÈSE.

Menez AD, et après avoir divisé cette droite au point E dans le rapport donné, cherchez une ligne EC qui soit avec BD dans le même rapport; ensuite, du point E pris pour centre et avec CE pour rayon, décrivez un cercle qui sera le lieu demandé.

En effet menez AB qui coupe l'une et l'autre circonférences, et tirez CE, BD. Puisque CE:BD::AE:AD, il s'ensuit que CE:AE ::BD:AD; par conséquent les triangles CAE et BAD, qui ont en

outre un angle commun, sont semblables, et AC:AB::AE:AD, c'est-à-dire dans le rapport donné.

PROPOSITION III.

THÉORÊME.

Sur chacun des côtés d'un angle donné, on place un point, et sans changer le rapport des distances des deux points ainsi déterminés au sommet de l'angle, ni la position de ce sommet, ni la grandeur de l'angle, on suppose que l'un des points parcourt une ligne droite donnée; il est question de démontrer que l'autre point aura aussi pour lieu une droite déterminée.

Le rapport de BA à AC (*fig.* 3), l'angle BAC et son sommet A, sont donnés; si l'extrémité B décrit la droite CD, l'extrémité C décrira aussi une droite CE déterminée de position.

ANALYSE.

Abaissez la perpendiculaire AD sur BD, menez AE formant avec AD un angle DAE égal à BAC, et portez sur la droite ainsi placée une distance AE quatrième proportionnelle à AB, AC et AD; la droite CE est le lieu demandé d'après l'hypothèse.

Puisque l'angle DAE est, par construction, égal à BAC, il est connu; et la perpendiculaire AD étant donnée, la droite AE est par conséquent déterminée de position; elle l'est aussi de grandeur, car AB, AC, AD sont données. De plus, l'angle BAC étant égal à DAE, il en résulte que l'angle BAD est égal à CAE; et si l'on considère d'ailleurs que AB:AD::AC:AE, on en conclura que les triangles ABD et ACE sont semblables comme ayant un angle égal chacun à chacun, compris entre des côtés proportionnels. Donc l'angle CEA est égal à BDA, c'est-à-dire à un angle droit; par conséquent la droite CE est déterminée de position.

SYNTHÈSE.

Après avoir abaissé la perpendiculaire AD, et fait l'angle DAE égal à BAC, portez de A en E comme ci-dessus une quatrième proportionnelle aux lignes AB, AC, AD, et, par le point E ainsi placé, menez sur AE la perpendiculaire CE; ce sera le lieu cherché. Car les triangles rectangles BAD et CAE ayant de plus un angle aigu égal, sont semblables, et par conséquent AB:AC::AD:AE ou::M:N, $\frac{M}{N}$ étant le rapport constant de AB à AC.

PROPOSITION IV.

THÉORÊME.

Si par un point fixe on mène deux droites dont les longueurs sont dans un rapport constant, et dont l'inclinaison est invariable; si l'extrémité de l'une parcourt une circonférence de cercle déterminée, l'extrémité de l'autre aura pour lieu une circonférence également déterminée.

Supposez que l'angle BAC (*fig.* 4), son sommet A, et le rapport de ses côtés, soient constants; si B parcourt un cercle donné, le lieu de C sera aussi un cercle déterminé.

ANALYSE.

Joignez le point A avec le centre D du cercle donné; menez une droite AE qui soit inclinée sur AD d'une quantité égale à l'angle donné, et dont la longueur ait avec AD un rapport égal au rapport donné; enfin tirez les droites DB et EC.

Le point A et le centre D étant donnés et fixes, la droite AD est déterminée; il en est donc de même de la droite AE qui est aussi constante et connue de grandeur; ainsi le point E est déterminé et invariable.

De plus, l'angle total BAC étant égal à DAE, la partie BAD est égale à CAE, et puisque d'ailleurs AB:AD::AC:AE, il s'ensuit que

les triangles ADB et AEC sont semblables, et que AB:BD::AC:CE, ou bien $CE = \frac{AC}{AB} \times BD$; or le rapport $\frac{CA}{AB}$ est constant et connu, BD l'est aussi d'après l'hypothèse; donc la distance CE est constante et déterminée. Donc le point C parcourt une circonférence de cercle dont le centre E et le rayon CE sont connus.

SYNTHÈSE.

Après avoir mené la droite AE inclinée sur AD d'une quantité égale à l'angle donné, et l'avoir prise d'une longueur telle que $\frac{AD}{AE}$ soit égal au rapport donné, du point E comme centre avec le rayon CE, décrivez un cercle, ce sera le lieu cherché.

Car AD:BD::AE:EC; mais l'angle BAD est égal à CAE, puisque BAC = DAE, donc les triangles ABD et CAE sont semblables, et AB:AC::AD:AE, c'est-à-dire dans le rapport donné.

Scholie. Un arc de cercle a pour limite sa tangente, et il s'en approche continuellement à mesure que le centre s'éloigne et que la circonférence s'aggrandit; ainsi le *lieu* rectiligne peut être déduit du *lieu* circulaire, et ce que nous aurons dit de celui-ci, nous pourrons le transporter au premier, en supposant que le centre soit situé à une distance infinie. Ainsi, dans la proposition 2 de ce livre, pag. 114, si on conçoit que les centres E et D (*fig.* 2), sans quitter la droite AD, s'éloignent toujours du point A et s'en écartent à une distance infinie, alors les cercles qui passent par C et par B, deviendront deux droites perpendiculaires à AD, ce qui est le cas de la première proposition, pag. 113. De même si nous éloignons à l'infini les centres D et E dans la proposition 4, sans leur faire quitter à l'un la droite AD, à l'autre la droite AE, alors les cercles qui passent en B et C, se confondront avec leurs tangentes, et deviendront par conséquent des droites perpendiculaires respectivement à AD et AE comme dans la proposition 3, pag. 115.

PROPOSITION V.

THÉORÊME.

Une droite menée par un point fixe est divisée en un point de sa longueur en deux parties telles que le rectangle de l'une et de la ligne entière, équivaut à un rectangle constant et donné; si le point de section se meut en parcourant une droite donnée, l'extrémité de la ligne mobile aura pour lieu une circonférence déterminée.

Le rectangle AB × AC (*fig.* 5), et le point A sont constants et donnés; la droite BD est donnée de position; le point C parcourra une circonférence connue.

ANALYSE.

Menez AD perpendiculaire à BD, et faites le rectangle AD × AE = AB × AC. Il suit de-là que AE et le point E sont complettement déterminés. Menez CE. Puisque AD × AE = AB × AC, AD : AB :: AC : AE, proportion qui démontre la similitude des deux triangles ABD et ACE auxquels l'angle A est commun. Il en résulte que ACE = ADB, et par conséquent que l'angle ACE est toujours droit quelque position que prenne la droite mobile, ce qui devient à dire que le point C parcourt une circonférence de cercle, dont AE est le diamètre.

SYNTHÈSE.

Après avoir mené la perpendiculaire AD, faites le rectangle AD × AE équivalent à l'espace donné, et sur le diamètre AE décrivez un cercle; c'est le lieu cherché. Car, si vous menez AC et CE, vous formerez deux triangles ABD et AEC qui seront semblables, puisqu'ils auront deux angles égaux chacun à chacun; ainsi AB : AD :: AE : AC, et AB × AC = AD × AE = l'espace donné.

PROPOSITION VI.

THÉORÊME.

Une droite, assujétie à passer constamment par un point fixe, est divisée en deux parties telles que le rectangle de l'une comptée du point fixe, par la ligne entière, soit constamment égal à un rectangle donné; si le point de division parcourt une circonférence donnée, l'extrémité de la droite aura pour lieu une ligne droite déterminée de position, ou une circonférence de cercle déterminée, selon que le point fixe sera ou ne sera pas situé sur la circonférence donnée.

Supposez que le rectangle AC × AB équivaille à une espace donné, et que le segment AC soit terminé à une circonférence donnée; le point fixe A peut être ou n'être pas sur cette circonférence. (*Fig.* 6 et 6 *bis*).

Premier cas. Si le point A est sur la circonférence donnée, *fig.* 6, le lieu de B est une droite déterminée de position.

ANALYSE.

Menez le diamètre AE, et faites AE × AD = AB × AC; le point D sera ainsi déterminé, et il est clair qu'il est un point du *lieu* cherché. Maintenant tirez CE et BD; puisque AE × AD = AB × AC, AC : AE :: AD : AB; donc les triangles CAE et BAD sont semblables. Ainsi l'angle ADB est égal à ACE, c'est-à-dire à un angle droit; par conséquent la droite DB est déterminée de position.

SYNTHÈSE.

Après avoir mené le diamètre AE, faites le rectangle AE × AD équivalent à l'espace donné; la perpendiculaire BD est le lieu cherché. Car, si vous menez ACB et CE, vous formerez deux triangles ACE et ADB évidemment semblables, ce qui montre que AC : AE :: AD : AB, d'où AC × AB = AE × AD = l'espace donné.

Deuxième cas. Si le point A n'est pas sur la circonférence donnée ECC′D, le lieu de B est une circonférence déterminée. (*Fig.* 6 *bis*).

ANALYSE.

Menez le diamètre EAD, et la corde CABC′ du cercle donné qui coupe le lieu demandé aux points B et F. Soit M le rectangle donné, et N le rectangle connu EA × AD. On a par hypothèse, AB × AC = AF × AC′ = M, et AC × AC′ = N; d'où il suit que le rapport $\frac{AC}{AF} = \frac{AC'}{AB} = \frac{N}{M}$. Donc ce rapport $\frac{AC'}{AB}$ est déterminé, et d'après la proposition 2 de ce livre, page 114, l'extrémité B de la droite AB est sur la circonférence d'un cercle connu.

SYNTHÈSE.

Après avoir mené le diamètre DAE, faites le rectangle AD × AH égal à l'espace donné, et (livre 3, prop. 2, p. 114) décrivez un cercle BGFH, tel qu'une corde de ce cercle menée par A soit divisée à ce point dans le rapport de AE à AH; ce cercle est le lieu demandé. Car AE : AH :: AC : AB :: AC × AC′ : AB × AC′; donc AC × AC′ : AB × AC′ :: AE × AD : AH × AD; mais AC × AC′ = AE × AD; donc AB × AC′ = AH × AD = M.

PROPOSITION VII.

THÉORÊME.

La grandeur d'un angle, son sommet, et le rectangle de ses côtés étant fixes et donnés, si l'extrémité de l'un des côtés parcourt une ligne droite donnée, celle de l'autre aura pour lieu une circonférence de cercle déterminée.

Le point A (*fig.* 7), l'angle BAC, et le rectangle AB × AC, sont constants; si B parcourt la droite donnée BD, le lieu de C est un cercle connu.

ANALYSE.

Par A abaissez la perpendiculaire AD sur BD. Menez AE qui fait

avec AD un angle égal à l'angle donné, et un rectangle AD × AE, équivalent au rectangle donné; tirez CE.

Puisque AD est évidemment donné de position et de grandeur, il en est de même de AE; et le rectangle AD × AE étant égal à AB × AC, il en résulte que AD:AB::AC:AE. Comme de plus l'angle DAB est égal à EAC, les triangles DAB et EAC sont semblables, d'où il suit que l'angle EAC est égal à ADB, c'est-à-dire à un angle droit; donc le point C parcourt un cercle, dont AE est le diamètre.

SYNTHÈSE.

Après avoir abaissé la perpendiculaire AD, menez AE de manière que l'angle DAE soit égal à l'angle donné, et que le rectangle AD × AE équivaille au rectangle donné; le cercle décrit sur AE comme diamètre est le lieu cherché.

En effet tirez CE: les triangles DAB et EAC sont semblables, puisqu'ils sont tous deux rectangles l'un en D, l'autre en C, et que de plus l'angle EAC est égal à BAD; donc AD:AB::AC:AE, et par conséquent le rectangle AB × AC équivaut à AD × AC, c'est-à-dire au rectangle donné.

PROPOSITION VIII.

THÉORÊME.

Si deux droites, dont les longueurs sont dans un rapport constant, se meuvent en s'appuyant toujours sur deux droites fixes données et en conservant la même direction, leur point d'intersection décrira une ligne droite déterminée.

Le rapport de AB à AC (*fig.* 8, *pl.* 3) est constant, ainsi que les angles ABD et ACD formés par ces droites avec les lignes fixes DE, DF; le lieu du point A est une droite déterminée.

ANALYSE.

Menez DA, et prolongez BA jusqu'à la rencontre de DF en G. Le

triangle DBG est déterminé d'espèce, puisque les angles B et D sont donnés. Il en est de même du triangle AGC, et par conséquent le rapport de AC à AG est déterminé; le rapport de AB à AC étant constant, il s'ensuit que celui de AB à AG, et celui de BG à AG, sont pareillement constants; il en est donc ainsi du rapport de BG à DG, et par conséquent du rapport de AG à DG. Comme de plus l'angle en G est déterminé, on voit que le triangle ADG est déterminé d'espèce, d'où il suit que la ligne droite AD est fixée de position.

SYNTHÈSE.

Sur DE prenez un point quelconque H, et menez par ce point des droites HI et HL faisant avec DF et DE des angles respectivement égaux aux angles donnés; prolongez ensuite IH jusqu'en M d'une quantité MH, telle que $\frac{MH}{HL}$ soit égal au rapport donné; cherchez une troisième proportionnelle IN entre IM et IH, et menez DNA; cette droite est le lieu cherché.

Car IM:IH::IH:IN, donc MH:IH::NH:IN; mais AB:AG ::NH:IN, et à cause de la similitude des triangles ACG et HLI, AG:AC::IH:HL, donc enfin AB:AC::NH×IH:IN×HL::MH ×IN:IN×HL::MH:HL, c'est-à-dire dans le rapport donné.

PROPOSITION IX.

THÉORÊME.

Trois droites qui concourent en un même point étant données de position, si une quatrième droite les coupe sous une inclinaison constante, et de manière que le rectangle de son premier segment, par une droite donnée, soit égal à la somme des rectangles de son premier et de son second segment par des lignes données; le lieu du point d'où sont comptés les segments, est une droite déterminée.

Supposez que ABCD (*fig.* 9) coupe les droites EF, EG et EH sous

des angles donnés, et tellement que AB × KL = AC × ML + AD × NM; les droites KL, LM, MN étant données, le lieu du point A sera une droite déterminée de position.

ANALYSE.

Puisque AC × ML = AB × ML + BC × ML, et que AD × NM = AB × NM + BD × NM, il s'ensuit que AB × KL = AB (ML + NM) + BC × ML + BD × NM, et AB × KN = BC × ML + BD × NM. Prenez MO, de manière que BC:BD::NM:MO, alors BC × MO = BD × MN, d'où AB × KN = BC (ML + MO) = BC × OL, et AB:BC ::OL:KN. Il suit de-là que le rapport de AB à BC est déterminé; mais le triangle BCE étant connu d'espèce, le rapport de BE à BC est donné, donc le rapport de AB à BE est connu; et puisque l'angle compris ABE est donné, on voit que le triangle BAE est déterminé d'espèce, ce qui revient à dire que la droite AE est déterminée de position.

SYNTHÈSE.

Ayant pris sur EH un point quelconque H, menez HGF sous l'inclinaison donnée; prenez MO de telle longueur que FG:FH ::NM:MO, et prolongez HF d'une quantité suffisante FI, pour que KN:OL::FG:IF; EI est la droite cherchée.

Car BC:AB::FG:IF::NK:OL, et AB × KN = BC × OL; mais BC:BD::FG:FH::NM:MO, donc BC × MO = BD × MN. Par conséquent AB × KN = BC × OL = BC (MO + ML) = BC × ML + BD × MN = BC × ML + MN (AD — AB); d'où il résulte que AB × KL = AB × ML + BC × ML + AD × NM = AC × ML + AD × NM.

PROPOSITION X.

THÉORÊME.

Quatre droites qui concourent en un même point étant données de position, si une cinquième droite les coupe sous une inclinaison constante et de telle manière que la somme des rectangles de son

premier et second segment, par des lignes données, soit égale à la somme des rectangles de son troisième et de son quatrième segment par d'autres lignes données, le point d'où sont comptés tous les segments, aura pour lieu une droite déterminée.

Si ABCDE coupe les quatre lignes FG, FH, FI et FK (*fig.* 10) sous un angle constant, et tellement que $AB \times MN + AC \times NO = AD \times OP + AE \times PQ$, les quatre droites MN, NO, OP, PQ étant données, le point A parcourra une ligne droite déterminée de position.

ANALYSE.

Puisque $AB \times MN + AC \times NO = AD \times OP + AE \times PQ$, il s'ensuit que $AB \times MO + BC \times NO = AB \times OQ + BD \times OP + BE \times PQ$, et par conséquent $AB \times MQ + BC \times NO = BD \times OP + BE \times PQ$. Faites $BD : BC :: NO : OR$, et $BD : BE :: PQ : PS$; alors $BD \times OR = BC \times NO$, et $BD \times PS = BE \times PQ$, d'où il résulte que $AB \times MQ + BD \times OR = BD \times OP + BD \times PS$ ou $AB \times MQ = BD \times SR$, c'est-à-dire $AB : BD :: SR : MQ$. Le triangle BDF étant donné d'espèce, le rapport de AB à BF est déterminé, et comme de plus l'angle ABF est constant, il est clair que le triangle BAF est pareillement déterminé d'espèce, ou ce qui revient au même, que la droite AF est déterminée de position.

SYNTHÈSE.

Après avoir pris sur FK un point quelconque K, menez KIHG sous l'inclinaison donnée; faites $OR = \frac{GH \times NO}{GI}$ et $PS = \frac{GK \times PQ}{GI}$, et prolongez KG d'une quantité GL, telle que $MQ : SR :: GI : GL$; FL est le lieu demandé.

En effet $BD : BC :: GI : GH :: NO : OR$, et $BD \times OR = BC \times NO$; de plus $BD : BE :: GI : GK :: PQ : PS$, donc $BD \times PS = BE \times PQ$; ensuite $MQ : SR :: GI : GL :: BD : AB$, donc $AB \times MQ = BD \times SR$. Ainsi $AB \times MQ + BC \times NO = BD \times SR + BD \times OR = BD \times SO = BD \times PS + BD \times OP = BE \times PQ + BD \times OP$; en ajoutant aux

deux membres, le produit $AB \times OQ$ qui est égal à $AB \times NQ + AB \times NO$, ou à $AB \times PQ + AB \times OP$, on trouve à cause de $MO = MN + NO$, que $AB \times MN + AC \times NO = AD \times OP + AE \times PQ$.

PROPOSITION XI.

THÉORÊME.

Une droite étant donnée de position, si deux autres droites la coupent sous des inclinaisons données et de manière à intercepter sur elle à partir de deux points fixes, des segments dont le rapport soit constant, le point de concours des droites mobiles a pour lieu une droite déterminée. AB et AC (*fig.* 11) sont menées de manière que les angles ABF et ACF, et le rapport des segments BD, CE comptés à partir des points fixes D et E, soient constants; le lieu du point A est une droite déterminée.

ANALYSE.

Faites que FD soit à FE dans le rapport donné, et menez FA. Puisque FD:FE::DB:EC, il s'ensuit que FD:FE::FB:FC; conséquemment le rapport de FB à FC et celui de FB à BC sont déterminés. Mais les angles FBA et FCA étant donnés, le triangle BAC est évidemment donné d'espèce; donc le rapport de AB à BC est donné; d'où il suit qu'il en est de même du rapport de FB à AB. Il résulte de-là que le triangle FBA est déterminé d'espèce, ou que la droite FA est déterminée de position.

SYNTHÈSE.

Après avoir pris le point F de manière que FD soit à FE dans le rapport donné, menez DG et EG faisant avec FI des angles respectivement égaux aux angles donnés, et joignez leur point de concours G avec F; FGH est le lieu cherché.

Pour le prouver, menez par un point quelconque A de FH, les droites AB et AC respectivement parallèles à DG et GE, et faisant

par conséquent avec FI des angles égaux aux angles donnés. Il suit de cette construction que FG:FA::FD:FB::FE:FC, ou bien FD :FE::FB:FC, et par conséquent DB:EC::FD:FE; c'est-à-dire dans le rapport donné.

PROPOSITION XII.

THÉORÊME.

Si par deux points donnés, on mène deux droites dont les longueurs soient entre elles dans un rapport constant, le point de concours de ces lignes aura pour lieu une droite ou une circonférence de cercle déterminée.

AC et BC, menées par les points fixes A et B (*fig.* 12 et 12 *bis*), sont dans un rapport déterminé; le lieu du point de concours C est une droite ou une circonférence de cercle.

Premier cas. Quand le rapport donné est celui d'égalité, le lieu de C, *fig.* 12, est une droite.

ANALYSE.

Prenez le milieu E de AB, et menez EC. Les triangles ACE et BCE, ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun, sont égaux, ce qui prouve que l'angle AEC est égal à BEC, c'est-à-dire que EC est perpendiculaire sur AB, et par conséquent déterminée de position.

SYNTHÈSE.

La perpendiculaire EC élevée par le milieu de AB, est le lieu cherché. Car si l'on mène, d'un point quelconque C de cette droite, deux autres lignes aux points A et B, il est facile de voir qu'elles sont égales.

Deuxième cas. Quand le rapport donné n'est pas égal à l'unité, le lieu de C est une circonférence de cercle. (*Fig.* 12 *bis*).

ANALYSE.

Menez CD faisant avec BC un angle égal à BAC, et rencontrant

AB prolongée en D. Les triangles DAC et DCB qui ont l'angle en D commun, et les angles en A et en C égaux, sont semblables; donc AD:AC::DC:BC, ou bien AD:DC::AC:BC, c'est-à-dire dans le rapport donné. Mais AD:DC::DC:DB, donc AD est à BD en raison doublée du rapport de AD à DC, ou :: $\overline{AD}^2:\overline{DC}^2$; ce dernier rapport étant donné, l'autre l'est donc aussi. Conséquemment BD et le point D sont déterminés; d'où il suit que DC est aussi déterminé et constant, ce qui signifie que le point C est sur la circonférence de cercle décrite de D comme centre avec DC pour rayon.

SYNTHÈSE.

Partagez AB dans le rapport donné au point E, et prenez le point D de telle manière que ED soit à BD dans ce même rapport; le cercle décrit de D comme centre avec DE pour rayon, est le lieu demandé.

En effet, puisque AE:BE::ED:BD, on a, AD:ED ou DC::ED ou DC:BD; ainsi les triangles DAC et DCB, ayant un angle commun compris entre des côtés proportionnels, sont semblables, et AC :BC::AD:DC ou ED, c'est-à-dire dans le rapport donné.

Scholie. Puisque, dans le second cas, AC:BC::AD:ED, on voit qu'à mesure que le rapport de AC à BC s'approchera de l'unité, le centre D s'écartera de plus en plus de A et de E, et le point E tendra continuellement à se confondre avec le milieu de AB; à la limite, c'est-à-dire quand $\frac{AC}{BC}$ sera égal à l'unité, l'arc EC se confon- avec sa tangente qui sera alors une droite perpendiculaire sur le milieu de AB. On voit par-là que le premier cas peut être déduit du second.

PROPOSITION XIII.

THÉORÊME.

Si un point mobile est assujéti à cette condition que le quarré de sa distance à un point fixe donné, équivaille au rectangle de sa distance

à une droite fixe et d'une autre ligne donnée, le lieu de ce point est une circonférence de cercle déterminée.

Le point A et la droite CD (*fig.* 13) sont dans une position déterminée; on suppose que le quarré de BA soit égal au rectangle de la perpendiculaire BC et de la droite K; il faut prouver que le lieu de B est une circonférence de cercle déterminée.

ANALYSE.

Menez DFA parallèle à CB, faites $AO = \frac{1}{2}K$, prenez le milieu de AO en G, tirez BO, et abaissez la perpendiculaire BF.

Puisque G est le milieu de AO, $\overline{OB}^2 - \overline{AB}^2$ ou $\overline{AB'}^2 - \overline{OB'}^2 = 2AO \times GF = K.GF$; mais $\overline{AB}^2 = K.BC = K \times DF$, donc $\overline{OB}^2 = K.DG$. Comme DG est donné, OB est déterminé; et une des extrémités O de cette droite étant déterminée, l'autre doit être située sur la circonférence BB'H.

SYNTHÈSE.

Après avoir mené DA parallèle à CB, faites $AO = \frac{1}{2}K$, $AG = \frac{1}{2}AO$, et $OH = \sqrt{K.DG}$; le cercle décrit de O comme centre avec OH pour rayon, est le lieu demandé.

Car $\overline{OB}^2 - \overline{AB}^2$ ou $\overline{AB'}^2 - \overline{OB'}^2 = 2AO \times GF = K \times GF$; et comme par construction $\overline{OH}^2$ ou $\overline{OB}^2 = K \times DG$, il s'ensuit que $\overline{AB}^2 = K \times DF = K \times BC$.

Corollaire. Si le point donné A est situé sur DC, c'est-à-dire s'il coïncide avec D, alors $DG = \frac{1}{4}K$ et $OH = \frac{1}{2}K$, c'est-à-dire que le cercle passe par D; dans ce cas AB est une corde, et son quarré est égal au rectangle du segment DF, et du diamètre K, ce qu'on savait *à priori*.

PROPOSITION XIV.

PROBLÊME.

Si par deux points donnés on mène deux droites qui se coupent,

et qui soient telles que la différence du quarré de l'une et d'un espace donné, soit en rapport constant avec le quarré de l'autre, le lieu du point de concours de ces droites est une circonférence de cercle déterminé.

Soient AC et BC (*fig.* 14) les deux droites mobiles, et supposez que le rectangle AC × AD équivaille à l'espace donné; alors si la différence entre le quarré de AC et ce rectangle, est dans un rapport déterminé avec le quarré de BC, le lieu du point C sera une circonférence déterminée.

ANALYSE.

Faites que AE soit à BE dans le rapport donné, menez CE et BD, prolongez CB jusqu'à la rencontre de la circonférence de cercle circonscrite au triangle ADB, et menez AF.

Le rectangle AC × CD étant égal à FC × BC, il s'ensuit que FC × BC est au quarré de BC ou que FC est à BC dans le rapport de AE à BE; par conséquent AF est parallèle à CE, et l'angle ECB est égal à AFB, c'est-à-dire à BDC. Par les points C, D, B, faites passer un cercle qui coupera AB en G, et menez CG et DG; alors le rectangle BA × AG est égal à CA × AD ou à l'espace donné, d'où il suit que le point G est déterminé, ainsi que AG. On voit aussi que l'angle CDB ou ECB est égal à CGB; donc les triangles BEC et CEG sont semblables, et GE:CE::CE:BE; d'où $\overline{CE}^2 = GE \times BE$. Ce dernier résultat prouve que CE est une ligne déterminée, et conséquemment que le lieu du point C est un cercle dont E est le centre.

SYNTHÈSE.

Faites le rectangle AB × AG équivalent à l'espace donné, et $\frac{AE}{BE}$ égal au rapport donné; prenez une moyenne proportionnelle EH entre GE et BE; le cercle décrit de E comme centre avec le rayon EH est le lieu demandé.

Pour le démontrer, par les points A, D, B et par les points C, B, G,

faites passer des cercles, prolongez CB jusqu'en F, et menez AF, CG, DG. Puisque $GE \times BE = \overline{HE}^2$, GE:HE ou CE::HE ou CE:BE, et par conséquent les triangles GEC et CEB sont semblables, d'où il suit que les angles EGC et ECB sont égaux. Mais EGC $=$ CDB $=$ AFB, donc ECB $=$ AFB, et les lignes CE et AF sont parallèles. Par conséquent AE:BE::FC:BC::FC $\times$ BC ou AC $\times$ CD, ou AC (AC $-$ AD):$\overline{BC}^2$. Or AD $\times$ AC $=$ AB $\times$ AG $=$ l'espace donné; ainsi la différence entre le quarré de AC et cet espace, lequel est égal à AC $\times$ AD, est au quarré de BC dans le rapport donné de AE à BE.

Scholie. Le théorême précédent étendu à ses cas extrêmes, comprend plusieurs propositions particulières. Ainsi, en supposant que le rapport donné soit égal à l'unité, l'espace donné sera équivalent à la somme ou à la différence des quarrés de AC et BC, selon que cet espace sera plus grand ou plus petit que $\overline{AC}^2$ Quand il surpasse le quarré de AC, le centre E coïncide avec le milieu de AB, comme dans le premier cas de la dix-septième proposition de ce livre, page 132. Mais quand le quarré de AC excède l'espace donné, le rapport de AE à BE étant celui d'égalité, le centre E qui est alors au-delà de B, doit être situé à une distance infinie, et par conséquent l'arc HC se confond avec sa tangente qui est perpendiculaire sur le milieu de GB, comme dans la proposition suivante.

De plus si l'espace donné est supposé nul, alors le rapport de $\overline{AC}^2$ à $\overline{BC}^2$ est donné, et par conséquent celui de AC à BC l'est aussi; dans ce cas, AG est nul, le point G coïncide avec A, et le centre et le rayon du cercle cherché sont déterminés de la même manière que dans la proposition 12, page 126.

PROPOSITION XV.

THÉORÊME.

Si par deux points fixes donnés on mène deux droites qui se

coupent de manière que la différence de leurs quarrés soit constante, leur point de concours décrit une ligne droite déterminée de position.

Les droites AC et BC (*fig.* 15), menées par les points A et B, sont telles que la différence de leurs quarrés est constante; le lieu de leur point de concours C est une droite déterminée.

ANALYSE.

Abaissez la perpendiculaire CD sur AB, et prenez le milieu de AB en E. Il est clair que $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = 2\,\overline{AB \times ED}$, donc le rectangle $AB \times ED$, et par conséquent son côté ED, sont déterminés; ainsi le point D et la perpendiculaire CD sont également déterminés; d'où il suit que CD est le lieu cherché.

SYNTHÈSE.

Prenez le milieu E de AB, et faites le rectangle $2AB \times ED$ équivalent à l'espace donné; la perpendiculaire DC est le lieu demandé.

Car $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = AB \times 2ED =$ l'espace donné.

PROPOSITION XVI.

LEMME.

Si sur une droite AB (*fig.* 16), partagée au point C en deux parties telles que $BC = n \times AC$, on prend un point quelconque D, on aura l'équation $n \times \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = AB \times BC + (n+1)\overline{CD}^2$.

Pour le démontrer décrivez sur AB un demi-cercle, et élevez la perpendiculaire CE, menez AE, BE, et la droite DF parallèle à CE qui rencontre AE en F; tirez BF.

L'angle AEB étant droit, AC:CE::CE:BC, et conséquemment AC:BC::$\overline{AC}^2$:$\overline{CE}^2$; mais $BC = n \times AC$, donc $\overline{CE}^2 = n \times \overline{AC}^2$. De plus AB:AE::AE:AC, et AB:AC::$\overline{AE}^2$:$\overline{AC}^2$, et puisque $AB = (n+1)$ AC, il faut que $\overline{AE}^2 = (n+1)\,\overline{AC}^2$. Maintenant CE et DF étant parallèles, CE:DF::AC:AD, et $\overline{CE}^2$:$\overline{DF}^2$::$\overline{AC}^2$:$\overline{AD}^2$; or $\overline{CE}^2 = n\overline{AC}^2$,

donc $\overline{DF}^2 = n\overline{AD}^2$. Mais $\overline{BE}^2 = AB \times BC$, et comme les triangles BDF et DEF sont rectangles, $\overline{BD}^2 + \overline{DF}^2 = \overline{BF}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{EF}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{CD}^2 + (EC - FD)^2$; d'où l'on déduit par substitution, $n\,\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = AB \times BC + (n+1)\overline{CD}^2$.

PROPOSITION XVII.

THÉORÊME.

Si, par plusieurs points fixes donnés, on fait passer des droites terminées toutes à un même point, et telles que la somme de leurs quarrés est constamment égale à un espace donné, ce point de concours aura pour lieu une circonférence de cercle déterminée.

PREMIER CAS. Quand les points donnés sont seulement au nombre de deux.

Supposez que les droites AP et BP (*fig.* 17) menées par les points A et B, soient telles que la somme de leurs quarrés équivaille toujours à un espace donné; le lieu de leur point de concours est une circonférence déterminée.

ANALYSE.

Prenez le milieu de AB en O, et menez OP. On aura $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 2\overline{AO}^2 + 2\overline{OP}^2$; ainsi $\overline{AO}^2 + \overline{OP}^2$ est déterminé; mais AO et son quarré étant déterminés, le quarré de la ligne OP et cette ligne elle-même, le sont aussi; donc le lieu de P est une circonférence de cercle dont O est le centre et OP le rayon.

SYNTHÈSE.

Prenez le milieu O de AB, cherchez une droite AF dont le quarré soit égal à la moitié de l'espace donné, et faites $\overline{OE}^2 = \overline{AF}^2 - \overline{AO}^2$; le cercle décrit du centre O avec le rayon OE est le lieu demandé.

Car $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 2\overline{AO}^2 + \overline{OP}^2 = 2\overline{AO}^2 + 2\overline{OE}^2 = 2\overline{AF}^2 =$ l'espace donné.

DEUXIÈME CAS. Quand les points donnés sont au nombre de trois.

Les droites AP, BP, CP, menées par les points A, B, C, étant telles que la somme de leurs quarrés est constamment égale à un espace donné, le lieu du point de concours P est une circonférence de cercle déterminé. (*Fig.* 17 *bis*).

ANALYSE.

Prenez le milieu de AB en E; $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=2\overline{AE}^2+2\overline{EP}^2$; par conséquent $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2=2\overline{AE}^2+2\overline{EP}^2+\overline{CP}^2$. Maintenant $2\overline{AE}^2=AB\times BE$; et de plus, si l'on abaisse la perpendiculaire PF sur EC, il est clair que $2\overline{EP}^2=2\overline{EF}^2+2\overline{PF}^2$, et $\overline{CP}^2=\overline{PF}^2+\overline{CF}^2$. Par conséquent $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2=AB\times BE+3\overline{PF}^2+2\overline{EF}^2+\overline{CF}^2$. Prenez EO le tiers de EC, et menez PO; en vertu du lemme précédent, $2\overline{EF}^2+\overline{CF}^2=EC\times CO+3\overline{OF}^2$. Ainsi $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2=AB\times BE+EC\times CO+3\overline{PF}^2+3\overline{OF}^2=AB\times BE+EC\times CO+3\overline{PO}^2$. Or les points E et O sont évidemment déterminés; il en est donc de même des rectangles $AB\times BE$ et $EC\times CO$; il suit de-là que $3\overline{OP}^2$ et OP sont pareillement déterminés. Donc le point P a pour lieu la circonférence décrite de O comme centre avec le rayon OP.

SYNTHÈSE.

Prenez $AE=\frac{1}{2}AB$, $EO=\frac{1}{3}EC$, et cherchez une droite OP telle que son quarré soit égal au tiers de l'excès de l'espace donné sur la somme des rectangles $AB\times BE$ et $EC\times CO$; le lieu cherché est un cercle dont O est le centre, et PO le rayon. Car $3\overline{PO}^2=3\overline{PF}^2+3\overline{OF}^2$, ou $3\overline{PO}^2+EC\times CO=3\overline{PF}^2+EC\times CO+3\overline{OF}^2=3\overline{PF}^2+2\overline{EF}^2+\overline{CF}^2$ (*lemme*) $=2\overline{PE}^2+\overline{PF}^2+\overline{CF}^2=2\overline{PE}^2+\overline{CP}^2$; par conséquent l'espace donné ou $3\overline{PO}^2+AB\times BE+EC\times CO=2\overline{AE}^2+2\overline{PE}^2+\overline{CP}^2=\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$.

Troisième cas. Quand les points donnés sont au nombre de quatre. Les droites AP, BP, CP, DP (*fig.* 17 *ter.*), menées par les points A, B, C, D, étant telles que la somme de leurs quarrés est constamment égale à un espace donné, le lieu de leur point de concours est une circonférence de cercle déterminée.

ANALYSE.

Prenez $AE = \frac{1}{2}AB$, $EF = \frac{1}{3}EC$, et menez PE et PF. Il est clair, d'après ce qui a été démontré pour le cas précédent, que $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 = AB \times BE + EC \times CF + 3\overline{PF}^2$; d'où $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 + \overline{DP}^2 = AB \times BE + EC \times CF + 3\overline{PF}^2 + \overline{DP}^2$. Abaissez la perpendiculaire PG sur DF, et vous verrez que l'espace donné est égal à $AB \times BE + EC \times CF + 3\overline{PG}^2 + 3\overline{FG}^2 + \overline{PG}^2 + \overline{DG}^2$; par conséquent $4\overline{PG}^2 + 3\overline{FG}^2 + \overline{DG}^2$ équivaut à un espace déterminé. Faites $FO = \frac{1}{4}DF$, et menez PO; alors, par le lemme, $3\overline{FG}^2 + \overline{DG}^2 = FD \times DO + 4\overline{OG}^2$. Donc $FD \times DO + 4\overline{OG}^2 + 4\overline{PG}^2 = FD \times DO + 4\overline{PO}^2$, équivaut à un espace déterminé; donc $4\overline{PO}^2$ et PO sont déterminés. Comme d'ailleurs le point O est donné, on voit que le lieu de P est un cercle qui a pour centre O, et PO pour rayon.

SYNTHÈSE.

Faites $AE = \frac{1}{2}AB$, $EF = \frac{1}{3}EC$, et $FO = \frac{1}{4}FD$. Cherchez ensuite le côté d'un quarré équivalent à l'espace donné diminué de $AB \times BE + EC \times CF + DF \times OD$, et avec la moitié de ce côté pour rayon, décrivez, de O comme centre, une circonférence de cercle, qui sera le lieu cherché.

En effet menez PE, PF, PO, et abaissez la perpendiculaire PG sur DF; alors $FD \times DO + 4\overline{PO}^2 = FD \times DO + 4\overline{OG}^2 + 4\overline{PG}^2 = 3\overline{FG}^2 + \overline{DG}^2 + 4\overline{PG}^2 = 3\overline{FG}^2 + 3\overline{PG}^2 + \overline{DP}^2 = 3\overline{PF}^2 + \overline{DP}^2$. Par conséquent $AB \times BE + EC \times CF + 3\overline{PF}^2 + \overline{DP}^2$, équivaut à l'espace donné. Mais, d'après ce qui a été démontré dans la synthèse du cas précédent, il est clair que $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 = AB \times BE + EC \times CF + 3\overline{PF}^2$; donc $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 + \overline{DP}^2$ équivaut à l'espace donné.

En poursuivant ce mode de démonstration, il est facile d'étendre successivement la proposition à un nombre quelconque de points donnés.

Scholie. La propriété qui vient d'être démontrée est susceptible d'être généralisée. Ainsi quand l'espace donné, au lieu d'être égal à

la somme des quarrés des lignes droites mobiles, équivaut à la somme de différents multiples de ces quarrés, le point de concours de ces droites a encore pour lieu une circonférence de cercle.

On conçoit d'autres droites dirigées du point P vers les centres A, B, C..., et sur ces droites d'autres centres dont les quarrés des distances au point P étant multipliés par des coëfficiens donnés, soient respectivement égaux aux quarrés des premières distances PA, PB, PC.... Mais cette propriété peut être rendue plus claire à l'aide d'une simple extension du lemme, *page* 131. Soient AP et BP (*fig.* 16 *bis*) deux des droites mobiles qui passent par les points fixes A et B; prenez $OB = v \times OA$; alors, menant PO et la perpendiculaire PL, il a été prouvé que $v \times \overline{AL}^2 + \overline{BL}^2 = AB \times BO + (v+1)\overline{OL}^2$; ajoutant de part et d'autre $(v+1)\overline{PL}^2$, il est clair que $v(\overline{AL}^2 + \overline{PL}^2) + \overline{BL}^2 + \overline{PL}^2 = v.\ \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = AB \times BO + (v+1)\overline{OP}^2$. Multipliez les deux membres par n et supposez $nv = m$, vous trouverez que $m.\ \overline{AP}^2 + n.\overline{BP}^2 = n.\ AB \times BO + (n+m)\overline{OP}^2$. Par des applications répétées de ce principe, on peut démontrer que $m.\ \overline{AP}^2 + n.\overline{BP}^2 + p.\overline{CP}^2 + q.\overline{DP}^2 +$ etc. $= (m+n+p+q+\text{etc.})\ \overline{OP}^2 +$ certains multiples de rectangles donnés; conséquemment le point de concours a pour lieu une circonférence de cercle dont le centre est O, et le rayon OP. Mais la propriété doit subsister si on divise tous ces multiples de quarrés par le même nombre, c'est-à-dire si, au lieu des quarrés des lignes mobiles, on considère les figures semblables construites sur elles. Si l'espace donné est égal à la somme des rectangles, le cercle se réduit à un point, puisque OP devient nul, et au-delà de cette limite, la proposition est impossible. Il est également visible que le centre O et le rayon OP resteront les mêmes dans quelque ordre qu'on effectue les constructions nécessaires pour obtenir la situation du centre (1).

(1) En examinant attentivement ces constructions, il est aisé de s'apercevoir que le centre du cercle cherché est en même temps le centre de gravité du système

DES PORISMES. — DÉFINITION.

Le *porisme* a pour objet de démontrer qu'on peut trouver plusieurs quantités telles qu'une certaine relation déterminée ait lieu entre ces quantités, et une infinité d'autres qui sont prises suivant une loi donnée.

Le porisme suppose qu'il y a des conditions qui rendent un problême indéterminé, c'est-à-dire susceptible d'une infinité de solutions.

PROPOSITION XVIII.

PORISME.

Trois points étant donnés, on peut en trouver un quatrième tel qu'en y faisant passer une droite quelconque, la somme des distances

---

des différents points fixes donnés. Cette propriété curieuse est énoncée dans le beau traité d'Huygens, intitulé *Horologium oscillatorium*, et elle lui fournit un exemple pour appliquer le principe de la conservation des forces vives qui est si important à considérer dans l'action des corps les uns sur les autres.

La proposition intéressante que l'auteur vient de démontrer, peut être établie d'une manière fort simple dans toute sa généralité par la géométrie analytique. En effet, soient (a, b), (a', b'), (a'', b''), etc., les coordonnées des points fixes donnés; (x, y) celles de l'un des points du lieu cherché, et m, n, p, etc. les multiples donnés. Il est clair que les quarrés des lignes que l'on considère sont $(x-a)^2+(y-b)^2$, $(x-a')^2+(y-b')^2$, etc., et comme par hypothèse, la somme des multiples de ces quarrés doit être égale à un espace déterminé, il s'ensuit que l'équation du lieu cherché est

$$\left.\begin{array}{l} m(x-a)^2+n(y-b)^2 \\ +n(x-a')+n(y-b')^2 \\ +p(x-a'')^2+p(y-b'')^2 \\ +\text{ etc.}, \quad +\text{ etc.} \end{array}\right\} = \text{const.}$$

A la seule inspection de cette équation, on reconnaît que les coëfficients de x^2 et de y^2 sont égaux, et par conséquent le lieu est une circonférence de cercle.

C.

de cette droite aux deux premiers points donnés, soit égale à sa distance au troisième.

Soient A, B, C, (*fig.* 18) les trois points donnés; on peut trouver un quatrième point D tel qu'une droite quelconque HDI étant menée par ce point, la somme des perpendiculaires AH et BI, soit égale à la perpendiculaire CG.

ANALYSE.

Par le point D, menez CDK; abaissez sur cette droite les deux perpendiculaires AK, BL, et menez AB qui rencontre KC en E.

D'après la propriété dont jouissent les droites qui passent par le point D, il est clair que les distances AK et BL de la droite CDK menée par le point C aux deux points restants A et B, doivent être égales. Ainsi les triangles rectangles AEK et BLE sont égaux, et par conséquent AE = BE; donc le point E est déterminé, puisqu'il est le milieu de AB. Menez à-présent la perpendiculaire EF; il est évident que 2EF = AH+BI. De plus, CG et EF étant parallèles, CD:DE::CG:EF, et CD:2DE::CG:2FE ou AH+BI; mais, par hypothèse CG = AH+BI, donc CD = 2DE, et comme CE est déterminé, le point D l'est aussi.

SYNTHÈSE.

Faites AE = $\frac{1}{2}$AB, et ED = $\frac{1}{3}$EC; D est le point cherché.

En effet abaissez la perpendiculaire EF. Puisque CG et EF sont parallèles, CD:DE::CG:EF; mais CD = 2DE, donc CG = 2EF = AH+BI.

Le porisme qui vient d'être démontré peut être regardé comme provenant de la solution de ce problême, Mener, par le point M, une droite MN telle que la somme des perpendiculaires AH et BI, abaissées sur cette droite des points A et B, soit égale à la perpendiculaire CG menée par C du côté opposé. Le point D se trouve comme précédemment, et la position de MND est déterminée. Mais

la direction de cette droite serait tout-à-fait indéterminée, s'il arrivait que le point M coïncidât avec D; dans cette supposition, le problême admettrait une infinité de solutions (1).

PROPOSITION XIX.

PORISME.

Un cercle et une droite étant donnés, on peut trouver un point tel que toute droite qui y passe et qui est terminée par le cercle et la droite, est divisée au point cherché en deux segments dont le rectangle est déterminé.

La droite AB (*fig.* 19, *pl.* 3), et le cercle HDF sont donnés de position; on propose de déterminer un point F qui divise une droite quelconque EDF en deux segments comprenant un rectangle déterminé.

ANALYSE.

Par F menez HFG perpendiculaire à AB. En vertu de l'hypothèse, le rectangle HF×FG est aussi égal à l'espace donné, et par conséquent à FD×FE; donc DF:HF::FG:FE. Les triangles DFH et GFE ayant ainsi un angle égal chacun à chacun compris entre des côtés proportionnels, sont semblables, et l'angle FDH est égal à FGE, c'est-à-dire à un angle droit; donc HDF est un demi-cercle qui a HF pour diamètre. Le centre C étant donné, la perpendiculaire HCG est aussi donnée, et par conséquent le point F est déterminé.

---

(1) Il est à-propos de remarquer que le point cherché D est le centre de gravité du système des trois points A, B, C considérés comme des points matériels pesants. C'est ce qui résulte de la manière dont on obtient le point D; mais cela peut être démontré *à priori* d'après la propriété de ce point. Car il résulte évidemment de cette propriété que la somme des moments de A, B, C est nulle par rapport à tout axe passant par D, ce qui est, comme on sait, la propriété caractéristique d'un centre de gravité.

(*Note du traducteur.*)

Les points F, G, H étant déterminés, il en est de même du rectangle HF × FG.

SYNTHÈSE.

Du centre C abaissez sur AB la perpendiculaire HCFG qui rencontre la circonférence en F; ce point F jouit de la propriété, que si l'on y fait passer une droite quelconque terminée à la circonférence et à AB, ses deux segments comprendront un rectangle déterminé. En effet menez DH; les triangles FGE et FDH sont semblables; donc FG:FE::FD:FH, d'où FE × FD = FG × FH = un rectangle déterminé.

Ce porisme peut être considéré comme provenant de la solution de ce problème. Par le point M, mener une droite DMFE telle que le rectangle de ses segments DF et FE soit égal à un rectangle déterminé. Le point F étant trouvé comme ci-devant, la droite DME est entièrement déterminée. Mais quand le point donné M se trouve coïncider avec F, la droite DE n'a plus de position déterminée, c'est-à-dire qu'elle satisfait aux conditions du problême, dans quelque direction qu'elle soit menée.

PROPOSITION XX.

PORISME.

Un cercle et un point étant donnés, on peut trouver un autre point tel qu'en menant de ce point et du premier, deux droites à un point quelconque de la circonférence, ces deux droites soient toujours dans un rapport donné. La circonférence ECF et le point A étant donnés, on peut trouver un point B (*fig.* 20) tel que les droites AC et BC, menées au point C de la circonférence ECF, soient entre elles dans un rapport déterminé.

ANALYSE.

Menez AB qui rencontre le cercle en E et F; tirez CE, CF, et

prolongez AC. Puisque les points E et F sont sur la circonférence, il résulte de l'hypothèse que AC:BC::AE:BE, et AC:BC::AF:FB. Il suit de-là que CE divise en deux parties égales l'angle ACB, et qu'il en est de même de CF par rapport à l'angle adjacent BCD; par conséquent l'arc ECF est un demi-cercle. Ainsi la droite qui passe par le centre O, est déterminée de position. Maintenant, puisque AF:FB::AE:EB ou bien AF:AE::FB:EB, il s'ensuit que EF étant divisée extérieurement et intérieurement dans le même rapport, EO est une moyenne proportionnelle entre AO et BO, ou $\overline{EO}^2 = AO \times BO$. Mais AO et EO sont donnés, donc BO et le point B sont déterminés. De plus, puisque AO:EO::EO:BO, il est clair que AE:EB::EO:BO, c'est-à-dire que les droites menées par A et B à la circonférence, sont entre elles, dans un rapport déterminé, égal à $\frac{EO}{BO}$.

SYNTHÈSE.

Menez AF par le centre du cercle donné, et faites AO:EO::EO:BO; B est le point cherché. En effet tirez CO. Puisque EO = CO, il s'ensuit que AO:CO::CO:BO; ce qui prouve que les triangles ACO et BCO qui ont en outre un angle commun en O, sont semblables; donc AC:BC::AO:CO, c'est-à-dire dans un rapport déterminé.

Ce porisme dérive évidemment du théorême qui forme la douzième proposition de ce livre, (*voyez page* 126).

PROPOSITION XXI.

PORISME.

Un cercle et une droite étant donnés, on peut trouver un point tel que toute droite menée par ce point à la ligne donnée, soit moyenne proportionnelle entre les deux segments interceptés par la circonférence et la droite données.

Soient donnés la droite AB (*fig.* 21) et le cercle HKF; il est

possible d'assigner un point D, par lequel, si l'on mène une droite quelconque FDC, la partie CD soit moyenne proportionnelle entre les segments CE et CF.

ANALYSE.

Par D abaissez la perpendiculaire IDG sur AB, et menez les droites CI, HK. Puisque CE:CD::CD:CF, $\overline{CD}^2 = CE \times CF = CK \times CI$; comme GI passe par le point D, il faut que GH:GD::GD GI, c'est-à-dire que $\overline{GD}^2 = GH \times GI$. Mais $\overline{CD}^2 = \overline{CG}^2 + \overline{DG}^2$, donc $CK \times CI = \overline{CG}^2 + GH \times GI$; retranchez ces deux membres de ceux-ci; $\overline{CI}^2 = \overline{CG}^2 + \overline{GI}^2$, il restera $CI \times KI = GI \times HI$; d'où CI:GI::HI :KI, et par conséquent les triangles CIG et HIK, qui ont en outre un angle commun I, sont semblables. Ainsi l'angle HKI étant égal à CGI, est droit, et par conséquent HI est un diamètre; donc GI est déterminée de position, et comme les points G, H, et I sont donnés, le rectangle $GH \times GI$ ou le quarré de GD est déterminé; il en est donc de même du point D.

SYNTHÈSE.

Par le centre O, abaissez la perpendiculaire GOI; et prenez une moyenne proportionnelle GD entre GH et GI; D est le point cherché. Car $CE \times CF = \overline{CO}^2 - \overline{HO}^2 = \overline{CG}^2 + \overline{GO}^2 - \overline{HO}^2 = \overline{CG}^2 + GH \times GI$; mais $\overline{GD}^2 = GH \times GI$, donc $CE \times CF = \overline{CG}^2 + \overline{GD}^2 = \overline{CD}^2$.

Ce porisme peut être regardé comme dérivé du problême suivant: « Par un point P, donné sur le diamètre d'un cercle, mener à la perpendiculaire AB une droite CLPM telle que le rectangle des segments CL et CM, soit égal au quarré de GN. » $CL \times CM = CK \times CI = \overline{CI}^2 - CI \times KI$; mais $\overline{CI}^2 = \overline{CG}^2 + \overline{GI}^2$, et $CI \times KI = GI \times HI$; donc $CL \times CM = \overline{CG}^2 + GI \times GH$, et si l'on fait $\overline{GD}^2 = GI \times GH$, il est clair que $CL \times CM = \overline{CG}^2 + \overline{GD}^2 = \overline{CD}^2$, et conséquemment $\overline{CD}^2 = \overline{GN}^2$, et CD = GN. La droite CD et le point D étant déterminés, le point C l'est donc ainsi que la droite CLPM. Le problême est

résolu alors en cherchant une moyenne proportionnelle GD entre GH et GI, et décrivant de D comme centre avec un rayon égal à GN, un cercle qui rencontre la perpendiculaire AB en C. On voit par-là que la position du point C ne dépend nullement de celle du point P. Si donc PLM coïncide avec CEF, on aura $CE \times CF = \overline{GN}^2 = \overline{CD}^2$, et cette propriété aura lieu quelle que soit la position du point C sur la droite AB.

PROPOSITION XXII.

PORISME.

Un point étant donné sur le diamètre d'un cercle donné, on peut trouver un autre point dans le prolongement de ce diamètre, tel que l'angle formé par deux droites menées de ce point aux extrémités d'une corde quelconque qui passe par le point donné, soit divisé en deux parties égales par le diamètre.

Sur le diamètre FH (*fig.* 22) d'un cercle donné, soit fixé un point A par lequel on mène une corde quelconque BAC; on peut trouver un point D dans la direction de ce diamètre, tel que l'angle ADC soit égal à ADB.

ANALYSE.

Tirez les droites EB, EO et BO. Les triangles EOD et BOD sont égaux, puisqu'ils ont le côté EO égal à BO, DO commun, l'angle ODE égal à ODB, et qu'ils sont tous deux de même espèce, vu que les angles DEO et DBO sont égaux l'un à l'autre. Donc l'angle EOG est égal à BOG. Il suit de-là que les triangles EOG et BOG sont pareillement égaux, ce qui montre que EB est perpendiculaire au diamètre FH. Par conséquent (1) FA:AH::FD:DH; le rapport

(1) Tirez les droites CF, CH, et la droite IHK parallèle à CF ou perpendiculaire à CH. Les angles ECF et FCB étant égaux, les angles CIK et CKI sont aussi égaux, et on a HK=HI. Les triangles semblables CAF, HAR donnent CF:HK ou HI::AF:AH. A cause des parallèles CF, KI; CF:HI::DF:DH; donc AF:AH::DF:DH.

de FA à AH étant donné, celui de FD à DA l'est de même; d'où il résulte que le point D est déterminé.

SYNTHÈSE.

Si vous prenez un point D tel que OA:OH::OH:OD, ce sera le point cherché. Pour le prouver, menez OC et OB. Puisque OH $=$ OC, OA:OC::OC:OD; donc les triangles AOC et COD ayant un angle égal chacun à chacun compris entre des côtés proportionnels, sont semblables, et par conséquent l'angle OCA est égal à ODC. On ferait voir, de la même manière, que l'angle OBA est égal à ODB. Mais le triangle BOC étant isocèle, les angles OCA et OBA sont égaux; donc il en est de même des angles ODC et ODB.

Ce porisme dérive encore de la proposition 12, page 126, dans le cas particulier où les deux points donnés coïncideraient avec deux points de la circonférence déterminée par le rapport donné. Car si AC, DC et AB, DB sont dans le même rapport, il est clair que AC :AB::DC:DB, et conséquemment l'angle BDC est divisé en deux parties égales par la droite DA.

PROPOSITION XXIII.

PORISME.

Un point étant donné sur la circonférence d'un cercle, on peut trouver un autre point tel que deux droites menées par ce point et par le premier à la partie opposée de la circonférence, retranchent sur une corde donnée, des segments dont les rectangles soient entre eux dans un rapport connu.

Supposez que le cercle ADBE (*fig.* 23), le point A, et la corde DE, soient donnés; il existe un autre point C tel que la droite AB et la droite CB menées à un point quelconque B de la circonférence, déterminent sur DE des segments, dont les rectangles $DG \times FE$ et $DF \times GE$, sont entre eux dans le rapport donné de KM à LM.

ANALYSE.

Menez la droite CA, et prolongez-la jusqu'à la rencontre de ED en H.

Puisque KM:LM::DG×FE:DF×GE, il s'ensuit que KL:LM::DG×FE — DF×GE:DF×GE; mais DG×FE — DF×GE =(DF+FG) (GE+FG) — DF×GE = FG×DE; donc KL:LM::FG×DE:DF×GE. Prenez sur DE un point H tel qu'on ait KL:LM::DE:DH, alors KL:LM::FG×DE:FG×DH, et par conséquent FG×DH = DF×GE; en ajoutant aux deux membres de cette équation le rectangle DF×FG, on en déduit que FH×FG = DF×FE = AF×FB. Donc FH:FB::AF :FG, d'où il suit que les triangles AFH et GFB sont semblables, et que l'angle AHF est égal à FBG; mais l'angle AHF est donné, puisque les points A, H et D sont déterminés, donc la droite AC est aussi déterminée, puisqu'elle doit sous-tendre un segment capable d'un angle déterminé FBG ou ABC; ainsi la position du point C est fixée.

SYNTHÈSE.

Prolongez la corde ED jusqu'en H d'une quantité telle que DE DH::KL:LM, menez HA, et en un point quelconque B de la circonférence, faites l'angle ABC égal à AHF, C est le point cherché.

Car, les triangles AFH et GFB étant évidemment semblables, FH:FB::AF:FG, d'où FH×FG = FB×AF = DF×FE; par conséquent FH×FG — DF×FG = DF×FE—DF×FG, ou bien FG×DH = DF×GE. Mais, d'ailleurs, KL:LM::DE:DH::FG×DE:FG×DH, donc KL:LM::FG×DE:DF×GE; par conséquent KM:LM::FG×DE + DF×GE:DF×GE, ou à cause de FG=DG—DF, DE = DG+GE; KM:LM::DG×FE:DF×GE.

Le porisme qui vient d'être démontré, dérive naturellement de ce problème, par deux points donnés A et C, dont l'un est sur la circonférence d'un cercle donné, mener à cette circonférence deux

droites AB et CB qui interceptent sur la corde DE des segments dont les rectangles $DG \times FE$ et $DF \times GE$, soient entre eux dans un rapport donné. Si l'on prend le point H comme ci-devant, l'analyse du problême montrera que l'angle ABC doit être égal à AHF. Donc, en décrivant sur AC un segment capable de cet angle, le contact ou l'intersection de ce segment avec le cercle donné, déterminera la position du point B. Mais il est clair que si le point C est aussi sur la circonférence, les deux cercles se confondront, et le problême deviendra susceptible d'une infinité de solutions.

PROPOSITION XXIV.

PORISME.

Si par deux points donnés on mène à l'une de deux lignes données, deux droites qui coupent l'autre ligne en deux points, on peut trouver sur cette seconde ligne deux points fixes, tels que le rectangle de leurs distances aux points d'intersection, soit égal à un rectangle assignable, qui restera le même quelle que soit la direction des deux droites sécantes.

Supposez qu'on mène par les points donnés D et E (*fig.* 24) deux droites DF et EF, vers un point F de la droite donnée AC; elles détermineront sur lasecon de droite donnée AB, deux points H et G, et quels que soient ces points, il existe sur AB deux autres points fixes I et K, tels que le rectangle $IH \times GK$ est constamment égal à un rectangle donne.

ANALYSE.

Menez EI, EA, DA, DK; et prolongez DE jusqu'à la rencontre de AC en P. Puisque les points A, F, P appartiennent à la droite AC, il résulte de l'hypothèse que les rectangles $IA \times AK$, $IH \times GK$, $IN \times NK$, sont égaux entre eux; donc $IH:IA::AK:GK$, d'où $AH:IA::AG:GK$, ou bien $AH:AG::IA:GK$. Par E, menez LEM parallèles à AB et rencontrant les droites AC et FD prolongées. Alors il

est clair que LE:LM::AH:AG::IA:GK. De plus, puisque IA ×AK = IN × NK, IN:IA::AK:NK, d'où l'on déduit que AN:IA ::AN:NK, et par conséquent IA = NK. D'après ce résultat, LE :LM::NK:GK, et LE:EM::NK:GN, ou bien LE:NK::EM:GN, c'est-à-dire ::ED:DN; ainsi les triangles LDE et KND sont semblables, d'où il suit que LDK est une ligne droite. Menez DO. Puisque IA=NK, LE:IA::LE:NK ou ::EO:OI::ED:DN, et par conséquent DO est parallèle à AB. Les parallèles OD et LM étant données de position, il résulte de ce qui précède, que les points O et L, et par conséquent les points I et K sont déterminés; d'où l'on voit qu'il en est de même du rectangle IA × AK.

SYNTHÈSE.

Menez DO, EL parallèles à AB, et rencontrant en O et L le prolongement de AC; tirez les droites EO, LD, et prolongez-les jusqu'à AB en I et K; ces derniers points sont les points cherchés. Car, si l'on mène DF et EF, il est clair que LE:IA::OE:OI::ED:DN ::DM:DG::LM:GK, d'où LE:LM::IA:GK; mais, d'un autre côté, LE:LM::AH:AG; donc IA:IH::GK:AK, et par conséquent IA × AK = IH × GK.

Ce porisme provient du problême suivant :

Deux droites AB et AC étant données de position, ainsi que les points I, K, E et D, trouver un point F tel que les droites EF, DF menées de ce point aux points donnés D et E, interceptent sur AB, à partir des points donnés I et K, deux segments dont le rectangle soit équivalent à un espace constant. Il est clair que quand les points I et K ont la position qui a été assignée ci-devant, le problême est indéterminé.

PROPOSITION XXV.

PORISME.

Trois droites non-parallèles étant données de position, on peut

en trouver une quatrième telle que si l'on mène à travers les quatre droites, des parallèles à une cinquième droite donnée, ces parallèles coupent les quatre premières droites en parties proportionnelles, dont les rapports sont constants.

Soient (*fig.* 25) AB, CD et AE les trois premières droites données; on peut en trouver une quatrième FG telle que toute parallèle à une autre droite donnée HIKL, qui traverse les quatre lignes AC, CD, AE, FG, soit divisée par elles en segments proportionnels aux droites HI, IK, KL dont les rapports sont connus.

ANALYSE.

Prolongez AE et FG jusqu'à leur point de concours M; par K et I, menez NO et PO respectivement parallèles à AB et FG, et par leur point de rencontre O, menez CO. Soit H′I′K′L′ une autre droite transverse divisée comme la première; menez de même P′O′I′ parallèle à PIO, et rencontrant CO en O′; enfin tirez O′K′, et prolongez cette droite jusqu'en N.

Puisque KO est parallèle à PH, HI:IK::PI:IO; et de plus, les parallèles PO et P′O′ étant coupées par les droites CP, CI et CO, il s'ensuit que PI:IO::P′I′:I′O′; donc H′I′:I′K′::P′I′:I′O′, d'où il suit que O′N′ est parallèle à ON. Maintenant IK:KL::OK:KN et I′K′:K′L′::O′K′:K′N′; donc OK:KN::O′K′:K′N′, ce qui prouve que les lignes AE, OC et FG concourent au même point M. De plus CA:AF::OK:KN::IK:KL; et comme le rapport de CA à AF est donné, il est clair que AF et le point F sont déterminés; mais le point L est donné, donc FLG est déterminée de position.

SYNTHÈSE.

Prenez le point F de manière que CA soit à AF dans le rapport de IK à KL, et menez LF; ce sera la ligne cherchée. Pour le prouver, menez NK et PI parallèles à AB et FG, et par leur point de concours O, menez CO; prenez sur cette droite un autre point O′ quelconque, menez pareillement O′K′N′ et O′I′P′, qui rencontrent

AE et CD en K′ et I′; la droite transversale H′I′K′L′ est divisée de la même manière que HIKL.

Car, puisque NO, N′O′ sont parallèles à AB, et que OP, O′P′ le sont à FG, il s'ensuit que HI:IK::PI:IO::P′I′:I′O′::H′I′:I′K′. De plus, comme CA:AF::IK:KL::OK:KN, on voit que les droites OC, EA, GF concourent au même point M, d'où il résulte que IK:KL::OK:KN::O′K′:K′N′::I′K′:K′L′.

Le porisme précédent provient du cas indéterminé de ce problème fameux: Quatre droites AB, CD, AE, FG (*fig.* 25 *bis*) étant données de position, mener une droite transversale HIKL qui soit coupée par ces lignes en des segments proportionnels aux droites données X, Y, Z. Supposez le problème résolu; prolongez GF et EA jusqu'à leur concours en M, menez les parallèles NKO et PIO, et tirez MTO. Puisque TA:AF::OK:KN::IK:KL, le rapport de TA à AF est donné, et par conséquent le point T et la droite MO sont déterminés de position. De plus PI:IO::HI:IK, donc le rapport de PI à IO est aussi donné; mais le triangle CPI étant évidemment donné d'espèce, le rapport de CP à PI est déterminé; ainsi le rapport de CP à PO est connu, et le triangle CPO déterminé d'espèce. Les droites MO et CO étant donc l'une et l'autre connues de position, leur point d'intersection O est déterminé; conséquemment les parallèles NO et PO sont déterminées de position; d'où il suit que leurs intersections K et I, ainsi que la droite transversale HILK, sont pareillement connues.

La construction du problème se déduit aisément de l'analyse précédente : pour cela ayant prolongé EA et GF jusqu'à leur point de concours M, faites FA:AT::Z:Y, et menez MTO. Prenez ensuite un point quelconque Q sur CB; menez QS parallèle à FG, et faites QR:RS::X:Y; après cela tirez la droite CS, et prolongez-la jusqu'à la rencontre de MO en O; menez enfin OI et KO respectivement parallèles à FG et AB; la droite HIKL, qui passe par les points

d'intersection I et K, est la droite demandée. Car HI:IK::PI:IO ::QR:RS::X:Y, et IK:KL::OK:KN::TA:AF::Y:Z.

Maintenant, si le rapport de CA à AF devenait égal à celui de Y à Z, le point T coïnciderait avec C, et la droite TO avec CO. Le problême, dans ce cas, serait donc indéterminé, c'est-à-dire que tout point pris sur CO jouirait de la propriété qui était auparavant exclusive au point O (1).

ISOPÉRIMÈTRES. — DÉFINITION.

On appelle figures *isopérimètres* celles qui ont un contour égal, ou de même étendue linéaire.

PROPOSITION XXVI.

PROBLÊME.

Sur une droite donnée de position, trouver un point tel que la somme de ses distances à deux points donnés soit la plus petite possible.

Soit proposé de mener par un point de la droite CD (*fig.* 26), aux points donnés A et B, deux droites AG et BG, dont la somme soit un *minimum*.

ANALYSE.

Par B, l'un des points donnés, abaissez une perpendiculaire BE sur CD, et après l'avoir prolongée d'une égale quantité au-dessous de CD, menez GF. Il est évident que les triangles rectangles BEG et FEG sont égaux; et par conséquent que BG = GF; ainsi AG

(1) Ce problême fut d'abord proposé par Newton, pour déterminer le cours d'une comète, au moyen de quatre observations faites à petits intervalles l'un de l'autre. Mais malheureusement la solution conduisit, dans la pratique, à des résultats incertains et même erronés. Cette faute imprévue porta Boscovich à examiner avec soin toutes les circonstances que pouvait présenter la question, et il découvrit que le problême devient indéterminé précisément dans le cas où il peut être appliqué aux observations astronomiques. (*Note de M. Leslie.*)

+GF est un *minimum*. Il résulte de-là que la ligne AGF est droite, et elle est déterminée, puisque les points A et F sont donnés; donc son intersection G avec CD, et les droites AG, BG sont pareillement déterminés.

Il est évident que les angles AGC et BGD sont égaux.

Corollaire. On résout d'une manière analogue un problême semblable au précédent; sur une droite donnée de position, trouver un point tel que la différence de ses distances à deux points donnés, soit la plus grande possible. Si ces points sont situés tous deux du même côté de la droite CD, *fig.* 26 *bis*, il est clair que la différence entre A′G et BG étant toujours moindre que A′B, la limite extrême a lieu, et cette différence est à son *maximum* quand A′G et BG coïncident avec A′B, auquel cas le point G se trouve en prolongeant A′B jusqu'à la rencontre de CD. Mais si les points A et B sont situés de côtés différents de la ligne CD comme dans la figure 26 *bis*, abaissez la perpendiculaire BE que vous prolongerez en EF d'une quantité égale, et menez les droites AFG et FG. Les triangles BEG et FEG sont évidemment égaux, et par conséquent BG = GF; mais dans le triangle AFG′, la différence entre AG′ et G′F étant moindre que AF, elle atteint son *maximum* quand ce triangle est supposé confondu avec cette droite AF; dans ce cas l'angle AGE = BGC.

PROPOSITION XXVII.

THÉORÊME.

Les droites menées par deux points donnés à un même point de la circonférence d'un cercle, forment la somme la moindre possible, quand elles sont également inclinées sur la tangente menée par leur point de concours.

De toutes les droites menées par A et B (*fig.* 27) à la circonférence du cercle GDH, la somme des droites AD et BD qui font des angles égaux avec la tangente EF, est la plus petite possible.

Par la proposition dernière, AD et BD qui tombent sous la même incidence sur la droite EF, sont plus courtes que les autres lignes qu'on pourrait mener par A et B à tout autre point de EF; mais les lignes menées à la tangente sont moindres que les lignes extérieures qui se terminent à la circonférence; ainsi par ces deux raisons combinées, AD et BD forment le *minimum* de toutes les droites menées des points donnés A et B à la circonférence GDH.

PROPOSITION XXVIII.

PROBLÊME.

Trouver un point tel que la somme de ses distances à trois points donnés, soit la plus petite possible.

Soit proposé de mener par les points A, B, C (*fig.* 28), les droites AD, BD, CD, telles que leur somme soit un *minimum*.

ANALYSE.

Si on imagine que BD reste constante, la position de D sur la circonférence décrite du centre C avec le rayon BD, doit, par la dernière proposition, être telle que la somme AD+CD étant un *minimum*, l'angle ADB soit égal à CDB. Par la même raison, si AD demeure invariable, BD et CD qui forment un *minimum*, doivent faire avec AD des angles égaux ADB et ADC. En réunissant ces conditions, on voit que les droites AD, BD, CD, forment entre elles des angles égaux à leur point de concours.

De-là dérive cette construction : Décrivez le triangle ABC, et sur chacun des côtés AC et BC construisez un triangle équilatéral, auxquels vous circonscrirez des cercles qui se rencontrent au point D, ce point est le point cherché. Car les angles ADC et CDB étant les suppléments des angles des triangles équilatéraux, sont chacun égal aux deux tiers de deux angles droits, ou au tiers de quatre;

par conséquent les trois angles formés autour du point D sont égaux.

PROPOSITION XXIX.

PROBLÊME.

Trouver sur une droite donnée un point tel que les lignes menées de ce point à deux points donnés, comprennent le plus grand angle possible.

Soit proposé de mener AC et BC (*fig.* 29), de manière que l'angle ACB soit un *maximum*.

ANALYSE.

Faites passer un cercle par les trois points C, A et B. Puisque l'angle ACB est plus grand que tout autre angle dont le sommet serait sur DE, cette droite doit avoir tous ses points hors du cercle, excepté le point C; ainsi DE touche le cercle en C. Il suit de-là que $GA \times GB = \overline{CG}^2$, et par conséquent le point C est déterminé.

PROPOSITION XXX.

PROBLÊME.

Parmi tous les triangles isopérimètres qui reposent sur une même base, déterminer celui dont l'aire est la plus grande.

Soit proposé de trouver un triangle ABC, reposant sur la base AC (*fig.* 30), et renfermant dans un périmètre donné la plus grande surface possible.

ANALYSE.

Puisque la base du triangle ABC est constante, tandis que son aire est un *maximum*, il faut que sa hauteur soit la plus grande possible, et par conséquent le sommet B se trouve sur une parallèle à AC la plus éloignée qu'il est possible. Supposez que cette parallèle soit DE; la somme des côtés AB et CB, et conséquemment le contour entier du triangle est, par la proposition 26 de ce livre, pag. 149, le

plus petit qu'il peut être, quand l'angle ABD est égal à CBE. Or il est clair que AB+BC doit être un *minimum*, parce que toutes les autres lignes menées par A et C sur un point quelconque de DE, font une somme plus grande que le contour constant AB+CB, puisque les segments des autres triangles isopérimètres sont en dessous de DE; donc l'angle ABD = CBE, ou ce qui revient au même BAC = BCA, d'où BC = BA. Ainsi le triangle ACB est isocèle, et il est déterminé, car tous ses côtés sont donnés.

Corollaire. Il résulte de-là qu'un polygone équilatéral est parmi tous les polygones isopérimètres du même nombre de côtés, celui qui renferme la plus grande surface. Car sans changer tout le reste de la figure, supposez que deux côtés quelconques adjacents viennent à varier, ils formeront le plus grand triangle possible quand ils seront égaux en longueur. Le polygone, qui n'est autre chose que l'assemblage des triangles ainsi formés, doit donc être à son *maximum* quand ces triangles sont isocèles dans chaque combinaison, et par conséquent lorsque tous les côtés de la figure sont égaux.

PROPOSITION XXXI.

THÉORÊME.

Un polygone dont tous les côtés sont donnés, à l'exception d'un seul, comprend la plus grande aire possible, quand il est inscrit dans un demi-cercle, qui a pour diamètre, le côté indéterminé.

Soit le polygone ABCDEF (*fig*. 31), dont les côtés AB, BC, CD, ED et EF sont constants, et reposent sur une base AF variable; l'aire du polygone aura atteint son *maximum*, quand AF sera le diamètre d'un cercle circonscrit au polygone.

En effet menez AD et FD à un quelconque des sommets D; les espaces ABCD et DEF resteront évidemment les mêmes, tandis que l'angle ADF s'aggrandira, et que les points A et F s'écarteront

l'un de l'autre. Ainsi le polygone renfermera la plus grande surface, quand le triangle ADF compris entre les côtés AD et DF aura atteint son *maximum*. Maintenant le triangle sera dans cet état lorsque la perpendiculaire abaissée de F sur AD sera la plus grande possible. Alors il est clair que ADF doit être un angle droit, et par conséquent le point D est situé sur une demi-circonférence dont AF est le diamètre. En appliquant le même raisonnement à tous les sommets B, C, E, on verra que tous doivent être sur la demi-circonférence dont AF est le diamètre.

Premier corollaire. Ainsi un polygone, dont tous les côtés sont donnés, contient la plus grande surface quand il peut être inscrit dans un cercle. Car soit ABCD un polygone dont tous les côtés sont donnés; menez le diamètre AF, et tirez DF. Le polygone ABCDF ainsi formé est un *maximum;* mais le triangle ADF est évidemment déterminé, donc le polygone restant ABCD est aussi un *maximum*.

Deuxième corollaire. Il résulte de-là que de tous les polygones isopérimètres d'un nombre donné de côtés, le plus grand est le polygone régulier. Car par le corollaire de la proposition précédente, ce polygone *maximum* doit avoir tous ses côtés égaux, et ses angles sont aussi égaux, puisque tous ses sommets sont sur la circonférence circonscrite au polygone.

PROPOSITION XXXII.

THÉORÊME.

Le cercle est le plus grand de tous les polygones isopérimètres.

Par les propositions précédentes, il est clair que le périmètre et le nombre des côtés étant donnés, la figure *maximum* est un polygone régulier. Soit ABCDEF (*fig.* 32) un tel polygone qui a le périmètre donné; partagez en deux portions égales les arcs correspondants du cercle circonscrit, et inscrivez dans ce cercle un polygone

régulier MBGC...LA d'un nombre de côtés double du précédent. Menez le diamètre MI et les droites MD et OD. Les deux polygones sont composés chacun d'un même nombre de triangles égaux à ODN pour l'un, et à ODI pour l'autre; ainsi leurs surfaces sont entre elles comme ON est à OI, ou ce qui revient au même comme PN est à MI. Mais si le grand polygone M....A s'était réduit à un polygone semblable, de même périmètre que A...F et dont le côté homologue à DI, serait égal à DN, les aires des deux polygones semblables seraient dans le rapport de $\overline{DI}^2$ à $\overline{DN}^2$, c'est-à-dire de MI à MN. Donc le polygone primitif A....F est à un autre polygone du même périmètre et d'un nombre de côtés double, comme PN est à MN. Une figure d'un périmètre constant a donc une aire de plus en plus grande, à mesure que l'on double le nombre de ses côtés. En continuant cette duplication, le polygone régulier qui en résulte acquiert une surface perpétuellement croissante. Ainsi le cercle, qui est la limite dont s'approchent tous ces polygones à mesure que le nombre de leurs côtés augmente, doit, dans le même contour, renfermer le plus grand espace possible (1).

---

(1) On trouve ces trois dernières propositions (30, 31, 32), traitées d'une manière différente, dans les Éléments de Géométrie de M. Legendre, pages 130 à 136 de la onzième édition, année 1817.

Le lecteur pourra encore s'exercer sur le problême suivant, dont un grand nombre de géomètres se sont occupés « inscrire dans un cercle donné, un polygone dont les côtés passent par autant de points donnés qu'il y a de côtés dans le polygone. » *Voyez* pour la solution de ce problême, tant par l'analyse que par la synthèse, *Mémoires de l'Académie de Berlin*, année 1776, ceux de l'Academie de Pétersbourg, année 1780; le Recueil de problêmes, publié en 1809 par M. de Stainville, l'un des répétiteurs de l'école polytechnique; le premier volume des *Annales de mathématiques* de M. Gergonne, qui contient plusieurs articles fort intéressants de M. Servois, conservateur du Musée d'artillerie; les ouvrages de géométrie de M. Carnot, et enfin *les Eléments d'analyse géométrique et algébrique*, par M. S. Lhuilier, Genève 1809.

NOTE

De M. LESLIE sur les trois livres de son Analyse géométrique.

Ces trois livres ont pour objet de montrer clairement l'usage que les géomètres grecs ont fait de leur analyse. Pour remplir cet objet, j'ai choisi une série de propositions qui présentent des difficultés croissantes, en allant du problême le plus simple aux questions plus composées.

Le premier livre, qui renferme des questions de divers genres, est tiré de plusieurs sources. Les propositions 25 et 26 contiennent l'analyse de deux problêmes fameux dans l'école de Platon « la trisection de l'angle, et la duplication du cube. » Ces problêmes conduisent immédiatement à une géométrie plus élevée. Le dernier théorême de ce livre est le seul qui soit tiré de celui d'Euclide, qui a pour titre : *Data* ou *les Données*.

Dans les second et troisième livres, j'ai cherché à présenter l'analyse des anciens dans son état le plus parfait, et avec l'extension que lui avaient donnée Apollonius et ses illustres contemporains. Sans omettre les questions principales, j'ai évité les détails longs ou fastidieux. Notre systême d'éducation moderne est tellement étendu qu'il ne reste pas de loisir pour se livrer à des études qui exigent peu de contention d'esprit.

La méthode d'analyse, tant estimée dans les écoles anciennes, devenait l'objet de l'enseignement, lorqu'on avait appris les éléments de géométrie. Suivant Pappus, elle contenait huit traités distincts. (Voyez les *titres de ces traités dans l'introduction de la partie algébrique de la Géométrie à trois dimensions*, de M. Hachette).

Les porismes d'Euclide, avec quelques additions, sont contenus dans les propositions 18 — 25 du troisième livre. Les dernières propositions de ce livre sont relatives aux isopérimètres. Quoique j'aie traité ce sujet avec la concision des géomètres modernes, on verra, j'espère, que je ne me suis pas écarté de l'esprit des anciens géomètres. (*Note de l'auteur, page 434 de l'ouvrage traduit.*)

TABLE DES MATIÈRES.

SECOND SUPPLÉMENT DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE; 8 pl.

ANALYSE GÉOMÉTRIQUE; 3 pl.

LIVRE Ier, CONTENANT 28 PROPOSITIONS.

LIVRE II, CONTENANT 31 PROPOSITIONS.

LIVRE III, CONTENANT 32 PROPOSITIONS.

FIN DE LA TABLE.

ERRATA.

Supplément de la Géométrie descriptive.

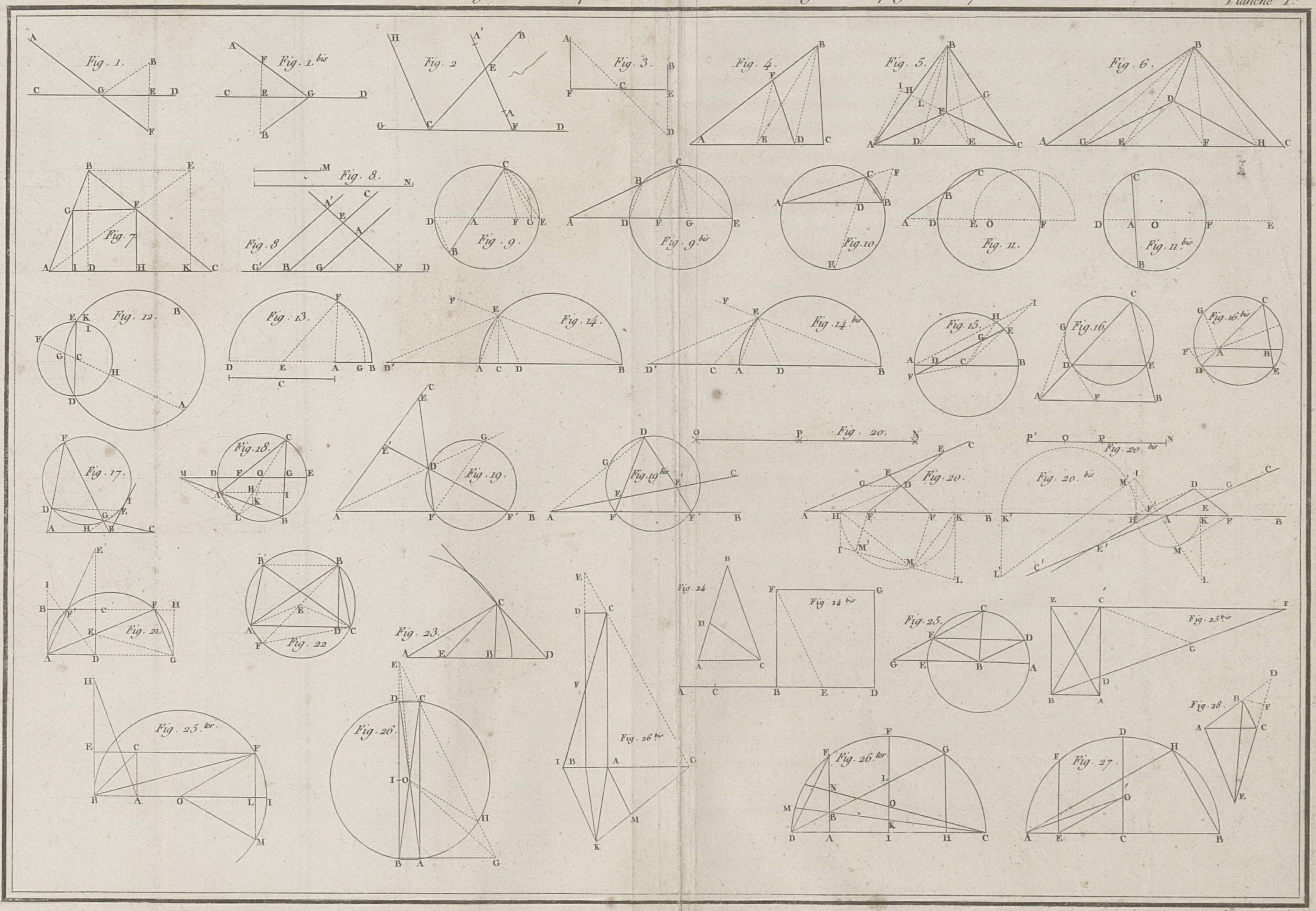
Page 7, ligne 18, au lieu de K, *lisez : k.* — Page 8, ligne 19, au lieu de asymptotes, *lisez :* droites génératrices de l'hyperboloïde. — Page 10, lig. 1, au lieu de le plan de la figure 1, *lisez :* les plans des *fig.* 1 et 2 de la. — Page. 11, lig. 1, *après* H'', *ajoutez* en parenthèse (le point H'' est au-delà de la droite xy de la *fig.* 2). — Page 24, ligne 19, au lieu de le droit, *lisez :* la droite. — Page 25, lig. 5, *après* osculateur, *ajoutez :* menée par son centre. — Même page, ligne 13, au lieu de O(M), *lisez :* OM.

Analyse Géométrique.

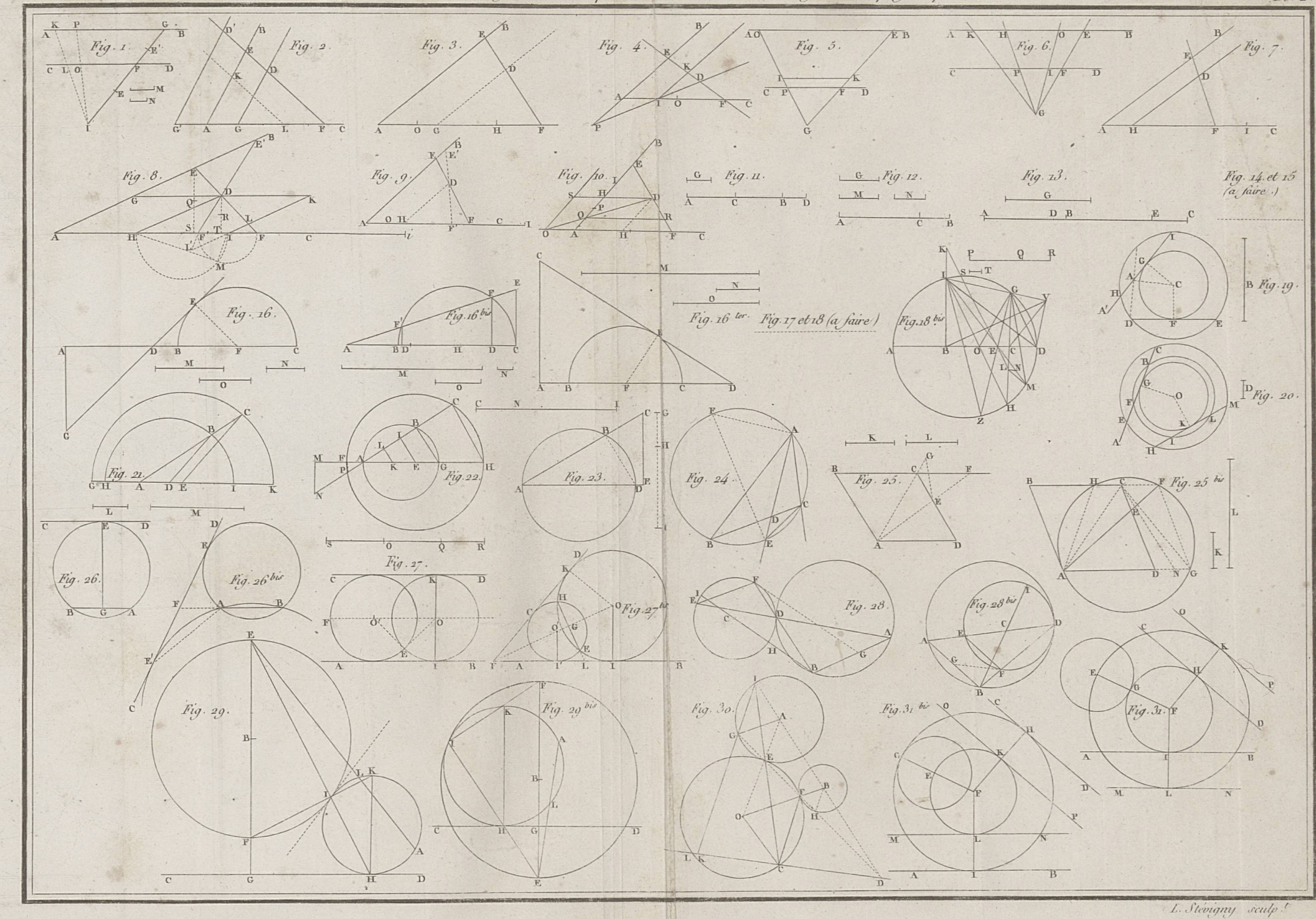
Page 40, lig. 3, au lieu de la ligne BH, *lisez :* DH. — Page 52, lig. 12, au lieu de l'analyse, *lisez :* l'angle. — Page 53; lig. 18, au lieu de AGH, *lisez :* BGH. — Page 56, lig. 6, au lieu de AG, *lisez :* DG. — Page 59, lig. 9, au lieu de AB, *lisez :* AD. — Page 75, lig. 15, au lieu de *fig.* 15, *lisez : fig.* 5, — Page. 82, avant-dernière ligne, au lieu de *fig.* 8, *lisez : fig.* 12. — Page 83, lignes 17 et 18, au lieu de CB, *lisez :* CD. — Page 91, ligne 6 en remontant, au lieu de MIG, *lisez :* MIH. — Page 100, lig. 4, au lieu de menez, *lisez :* mener. — Même page, lig. 3 en remontant, au lieu de AEC, *lisez :* AFC. — Page 101, lig. 3, au lieu de 26 (*bis*), *lisez :* 25 (*bis*). — Page 115, lig. 12, au lieu de CD, *lisez :* BD. — Page 151, lig. 2, au lieu de sont plus, *lisez :* sont en somme plus. — Même page, lig. 15, au lieu de centre C, *lisez :* centre B.

Appendice des Éléments de Géométrie à trois dimensions, in-8°. année 1817.

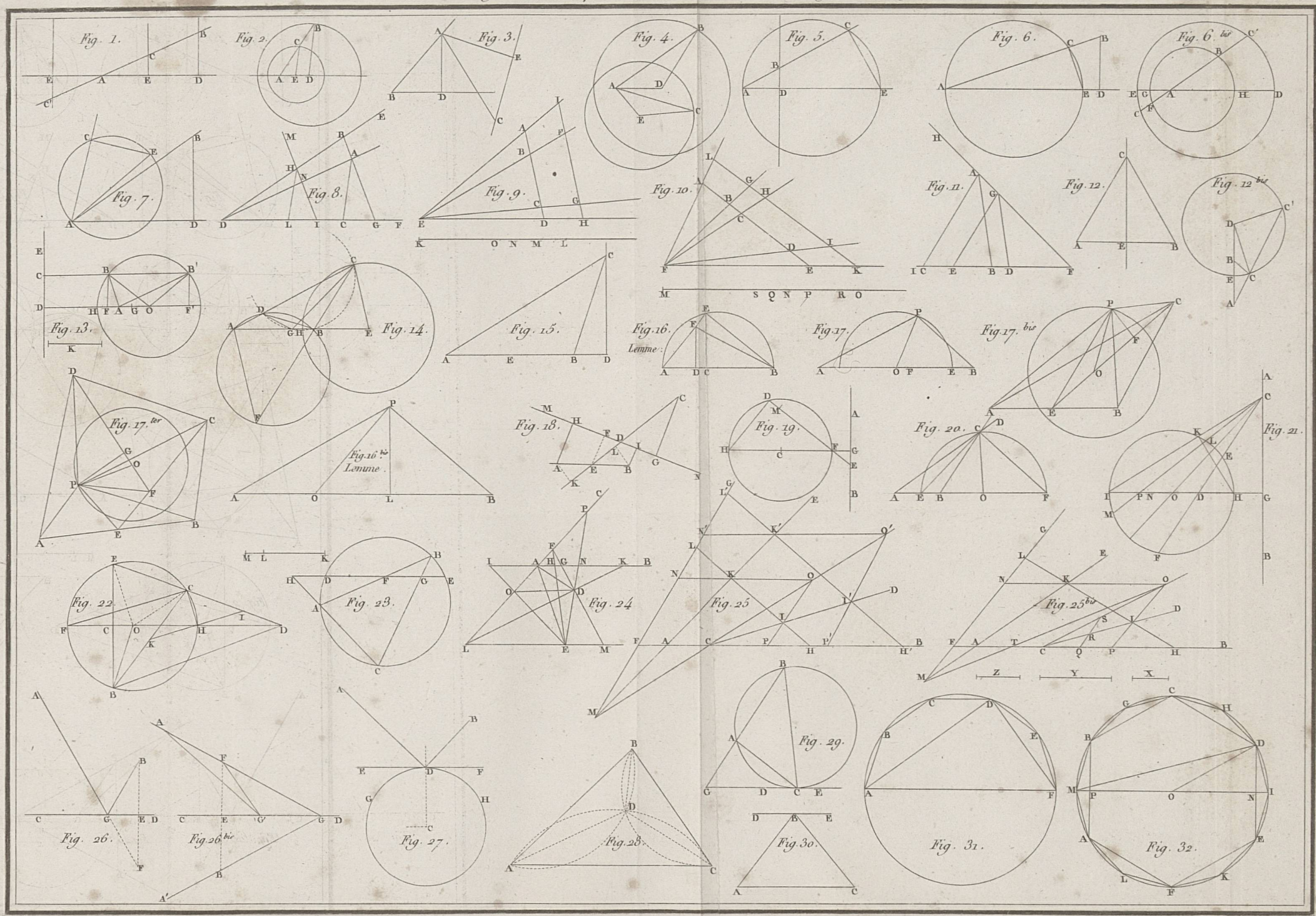
Page 139, lignes 6 et 8, au lieu de rayons, *lisez :* rayons inverses. — Page 140, lig. 6, au lieu de $\rho = r + r'$, *lisez :* $\rho' = r + r'$.



L. Sévigny sculp.t



L. Sevigny sculp.



L. Stévigny sculpt.

MÉMOIRE.

MÉMOIRE

Sur la Relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace;

SUIVI

D'UN ESSAI

SUR

LA THÉORIE DES TRANSVERSALES,

PAR L. N. M. CARNOT,

De l'Institut National de France, de l'Académie des Sciences, Arts et Belles-Lettres de Dijon, etc.

A PARIS,

Chez COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.

AN 1806.

MÉMOIRE

Sur la Relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace;

SUIVI

D'UN ESSAI

SUR LA THÉORIE DES TRANSVERSALES.

QUOIQUE toute figure plane puisse être décomposée en triangles, et que par conséquent la Géométrie à deux dimensions, puisse à la rigueur être ramenée à la Trigonométrie rectiligne seule; comme il faut encore lier ces triangles les uns aux autres pour en former la chaîne, il y a long-temps qu'on a reconnu l'avantage qu'il y aurait à considérer un point de plus; c'est-à-dire, la relation qui existe entre les distances respectives de quatre points quelconques pris dans un même plan. De même, dans la Géométrie aux trois dimensions, quoique tout solide ou polyèdre puisse être décomposé en pyramides triangulaires, et que par conséquent, la théorie de ces pyramides soit fondamentale : comme il faut encore lier les unes aux autres ces pyramides, qui ont chacune quatre sommets ou angles solides; il est à propos, pour compléter cette théorie, de considérer la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points pris dans l'espace. Ces distances entre les points comparés deux à deux, sont au nombre de dix; et de ces dix quantités, neuf quelconques étant connues, il est évident que la dixième est déterminée, et peut s'exprimer en valeurs des neuf

autres. C'est ce problème que je me suis proposé de résoudre. Pour y parvenir, je suis obligé de traiter plusieurs autres questions préliminaires, et parmi ces questions, il en est qui sont très-intéressantes par elles-mêmes : principalement celle d'exprimer en valeurs des seules arêtes d'une pyramide triangulaire, toutes les parties qui entrent dans la construction de cette pyramide; savoir, les angles que forment ces arêtes, soit entre elles, soit avec les faces; ceux qui sont compris entre ces mêmes faces; la perpendiculaire abaissée de chacun des sommets sur la base opposée, le solide de la pyramide, le rayon de la sphère circonscrite, celui de la sphère inscrite, etc.; d'où suit la solution de ce problème fondamental de la Géométrie aux trois dimensions, et qui répond au problème général de la Trigonométrie ordinaire dans la Géométrie plane.

Parmi toutes les quantités qui entrent dans la construction d'une pyramide triangulaire, six quelconques étant données suffisantes pour que le reste soit déterminé, trouver toutes les autres.

Les applications les plus essentielles de ce problème suffiraient seules pour fournir la matière d'un grand ouvrage, et cet ouvrage serait infiniment utile : mais je ne m'y arrête ici, qu'autant que cela m'est nécessaire pour arriver au but que je me suis proposé.

J'ai trouvé que plusieurs des problèmes réunis dans cet Opuscule, avaient déjà été résolus par d'autres, particulièrement par Euler dans divers Mémoires imprimés parmi ceux de l'Académie de Pétersbourg, par Lagrange dans ceux de l'Académie de Berlin pour l'an 1773, et par l'abbé de Gua dans ceux de Paris pour l'an 1783; mais je n'ai conservé de ces problèmes que le très-petit nombre de ceux qui m'étaient absolument indispensables pour ne pas rompre l'ensemble de mon travail, et je les ai traités conformément à mon but, qui était tout différent de celui de ces illustres géomètres. Le Mémoire de Lagrange renferme les recherches les plus étendues; mais il ne tend point, comme je le fais ici, à trouver l'expression explicite de toutes les parties de la pyramide en valeurs des seules arêtes, et son objet n'est pas de résoudre le problème général énoncé ci-dessus; mais de faire connaître, en appliquant à la pyramide

l'élégante méthode des projections ou des coordonnées, l'étendue des ressources d'une analyse habilement employée.

J'ai résolu tous mes problèmes par la méthode des triangles, c'est-à-dire, par la seule Trigonométrie, tant rectiligne que sphérique; cependant j'ai cru que, pour compléter mon travail, il convenait de montrer en peu de mots, comment cette méthode peut se lier avec celle des projections, ce qui me donne lieu de résoudre d'une manière nouvelle et qui m'a paru fort simple, le problème général de la transformation des coordonnées dans l'espace, c'est-à-dire, en supposant que les six coordonnées, tant anciennes que nouvelles, fassent entre elles des angles quelconques.

Afin de ne pas obliger le lecteur de recourir à d'autres ouvrages, j'ai donné au commencement, sous forme de lemmes, quelques formules trigonométriques familières, dont j'avais besoin.

Je termine cet écrit par un Essai sur la Théorie des transversales, sujet que j'ai déjà traité ailleurs, mais avec moins de précision. J'ai profité des réflexions qu'ont ajoutées à ce que j'avais déjà dit sur cela, plusieurs savans, principalement Servois, professeur de mathématiques aux Écoles d'Artillerie à Metz, dans son intéressant petit ouvrage intitulé : *Solutions peu connues de divers problèmes de Géométrie-pratique.*

LEMME I.

1. Si dans un triangle rectiligne quelconque, on nomme A, B, C, les trois angles; a, b, c, les côtés respectivement opposés, on aura les formules suivantes :

1°. .... $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$;

2°. .... $\sin A = \frac{1}{2bc}\sqrt{(2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4)}$;

3°. La perpendiculaire abaissée de l'angle A sur le côté opposé. $= \frac{1}{2a}\sqrt{(2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4)}$;

4°. L'aire du triang. $= \frac{1}{4}\sqrt{(2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4)}$;

5°. Le rayon du cercle circonscrit. $= \frac{abc}{\sqrt{(2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4)}}$;

6°. Le rayon du cercle inscrit. $= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{a+b+c}\right)}$.

LEMME II.

2. Si dans un triangle sphérique quelconque, on nomme A, B, C, les trois angles; a, b, c, les côtés respectivement opposés, on aura les formules suivantes :

1°. . . . . $\cos A = \frac{\cos a - \cos b \, . \cos c}{\sin b \, . \sin c}$;

2°. . . . . $\cos a = \frac{\cos A + \cos B \, . \cos C}{\sin B \, . \sin C}$;

3°. Le sinus de l'arc abaissé perpendiculairement de l'angle A sur le côté opposé. $\Big\} = \frac{1}{\sin a} \sqrt{(1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \, . \cos b \, . \cos c)}$.

LEMME III.

3. Si trois angles quelconques A, B, C, valent ensemble quatre droits ou la circonférence entière; et de même, si l'un d'eux, comme A, se trouve égal à la somme ou à la différence des deux autres; on aura toujours la formule suivante, symétrique entre les cosinus des trois angles

$$1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C + 2\cos A \, . \cos B \, . \cos C = 0.$$

Si les trois angles A, B, C, valent ensemble deux droits seulement, comme par exemple, les trois angles d'un triangle, ce sera la formule suivante qui aura lieu,

$$1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C - 2\cos A \, . \cos B \, . \cos C = 0.$$

Enfin si les trois angles A, B, C, ne valent ensemble qu'un seul angle droit, on aura

$$1 - \sin^2 A - \sin^2 B - \sin^2 C - 2\sin A \, . \sin B \, . \sin C = 0.$$

Remarque.

4. Il m'arrivera souvent de désigner l'angle compris entre deux
FIG. 1. droites partant d'un même point comme $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, de la manière suivante, $\overline{AB} \widehat{\ } \overline{AC}$. Cette expression indique en même temps les

directions des lignes de A vers B et de A vers C ; si au contraire on voulait exprimer l'angle que fait la direction $\overline{AB}$ avec la direction contraire à $\overline{AC}$, on écrirait $\overline{AB} \hat{} \overline{CA}$ en mettant le C avant l'A, et cet angle serait évidemment le supplément du premier. Si l'on voulait exprimer l'angle formé par les deux directions contraires à $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, on écrirait $\overline{BA} \hat{} \overline{CA}$, et cet angle redeviendrait ainsi le même que $\overline{AB} \hat{} \overline{AC}$.

La même notation a lieu à l'égard des droites qui ne se coupent pas, même lorsqu'elles ne sont pas dans un même plan. Alors on entend par l'angle qu'elles forment, celui qui serait compris entre deux autres droites respectivement parallèles aux premières et partant d'un même point. Ainsi $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, étant les directions de deux droites quelconques menées dans l'espace, $\overline{AB} \hat{} \overline{CD}$ sera l'angle compris entre ces deux directions, $\overline{BA} \hat{} \overline{DC}$ l'angle formé par les directions opposées, et $\overline{AB} \hat{} \overline{DC}$ ou $\overline{BA} \hat{} \overline{CD}$, l'angle formé par l'une de ces directions et la direction opposée à celle de l'autre droite. FIG. 2.

Si l'on désigne l'une de ces droites par m, par exemple, et l'autre par n, l'angle compris entre elles sera exprimé par $m \hat{} n$, mais cette expression ne distingue pas cet angle de son supplément.

Enfin si deux surfaces planes sont désignées l'une par M, par exemple, et l'autre par N, l'angle qu'elles formeront entre elles sera exprimé par $M \hat{} N$, ainsi des autres.

Cette notation est très-commode, parcequ'elle aide à retrouver facilement les parties de la figure auxquelles se rapportent les expressions qui entrent dans une formule.

PROBLÈME I.

5. DES *six droites qui joignent deux à deux quatre points pris dans un même plan; cinq quelconques étant données, trouver la sixième exprimée en valeurs des cinq autres.*

FIG. 3. *Solution.* Soient B, C, D, E, les quatre points proposés : supposant donc que cinq des six droites $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CE}$, $\overline{DE}$, soient données, il s'agit de trouver la sixième exprimée en valeurs des cinq autres.

Je fais, pour abréger,

$$BC = m, \quad CD = n, \quad BD = p, \quad BE = q, \quad CE = r, \quad DE = s.$$

Cela posé, puisque des trois angles CBD, CBE, DBE, il y en a un qui est la somme des deux autres, nous aurons par le lemme III,

$$1 - \cos^2 CBD - \cos^2 CBE - \cos^2 DBE + 2\cos CBD . \cos CBE . \cos DBE = 0 \ldots\ldots (A)$$

Or par le lemme I nous avons les trois équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \cos CBD &= \frac{m^2 + p^2 - n^2}{2mp} \\ \cos CBE &= \frac{m^2 + q^2 - r^2}{2mq} \\ \cos DBE &= \frac{p^2 + q^2 - s^2}{2pq} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B)$$

Substituant ces valeurs des cosinus dans l'équation (A) qu'on vient de trouver, exécutant les opérations indiquées et réduisant ; on aura la formule suivante, qui satisfait à la question proposée

$$\left.\begin{array}{l} m^4s^2+s^4m^2+n^4q^2+q^4n^2+p^4r^2+r^4p^2 \\ +m^2n^2p^2+m^2q^2r^2+n^2r^2s^2+p^2q^2s^2 \\ -m^2n^2q^2-m^2n^2s^2-n^2s^2q^2-s^2q^2m^2 \\ -m^2r^2s^2-m^2p^2s^2-p^2m^2r^2-p^2s^2r^2 \\ -n^2r^2q^2-n^2p^2q^2-p^2q^2r^2-p^2n^2r^2 \end{array}\right\}=0 \ldots\ldots (C)$$

cette formule exprime la relation existante entre les distances respectives de quatre points quelconques pris sur un même plan ; ou, ce qui est la même chose, entre les quatre côtés et les deux diagonales de tout quadrilatère plan. Elle est, comme on le voit, symétrique entre les six quantités m, n, p, q, r, s ; et comme chacune d'elles ne s'y trouve élevée qu'au carré et à la quatrième puissance, l'équation se résoudra toujours comme celles du second degré, *ce qu'il fallait trouver*.

PROBLÊME II.

6. *Trouver la hauteur d'une pyramide triangulaire en valeurs de ses six arêtes.*

Solution. Soit ABCD la pyramide triangulaire proposée, A son sommet, $\overline{AE}$ sa hauteur au-dessus de la base BCD ; il s'agit donc de trouver cette hauteur $\overline{AE}$, en valeurs des six arêtes $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$. FIG. 4.

Du pied E de cette perpendiculaire je mène aux angles B, C, D, de la base les trois droites $\overline{EB}$, $\overline{EC}$, $\overline{ED}$, qui sont les éloignemens de perpendicule, et je fais pour abréger :

1°. Les trois arêtes qui partent du sommet

$$\overline{AD}=f,\ \overline{AB}=g,\ \overline{AC}=h;$$

2°. Les trois côtés de la base respectivement opposés à ces arêtes

$$\overline{BC}=m,\ \overline{CD}=n,\ \overline{DB}=p;$$

3°. Les trois éloignemens de perpendicule

$$\overline{EB}=q,\ \overline{EC}=r,\ \overline{ED}=s,$$

4°. La hauteur cherchée

$$\overline{AE} = x.$$

Cela posé, comme j'ai conservé pour le quadrilatère BCDE, les mêmes dénominations que celles que j'avais adoptées dans le problème précédent pour le quadrilatère BCDE (*fig.* 3); la formule (C) de ce problème I sera applicable au cas présent. Or les trois triangles rectangles ABE, ACE, ADE, donnent pour éliminer de cette formule les quantités q, r, s, qui ne doivent point se trouver dans la valeur de x, les trois équations suivantes,

$$q^2 = g^2 - x^2, \quad r^2 = h^2 - x^2, \quad s^2 = f^2 - x^2.$$

Substituant donc ces valeurs de q^2, r^2, s^2, dans la formule (C) du problème précédent, nous aurons la formule suivante qui satisfait à la question proposée.

$$\begin{aligned} & x^2(2m^2n^2 + 2m^2p^2 + 2n^2p^2 - m^4 - n^4 - p^4) \\ & + f^4m^2 + m^4f^2 + g^4n^2 + n^4g^2 + h^4p^2 + p^4h^2 \\ & + m^2n^2p^2 + m^2g^2h^2 + n^2f^2h^2 + p^2f^2g^2 \\ & - m^2n^2f^2 - m^2n^2g^2 - m^2f^2g^2 - m^2f^2h^2 \\ & - m^2p^2f^2 - m^2p^2h^2 - n^2f^2g^2 - n^2g^2h^2 \\ & - n^2p^2g^2 - n^2p^2h^2 - p^2g^2h^2 - p^2f^2h^2 = 0, \ldots\ldots\ldots (A) \end{aligned}$$

ce qu'il fallait trouver.

COROLLAIRE I.

7. Puisque la formule (A) contient les sept quantités m, n, p, f, g, h, x; il est évident qu'elle résout cette question plus générale:

Parmi les quantités suivantes, savoir, les six arêtes d'une pyramide triangulaire et sa hauteur au-dessus de l'une des faces, six quelconques étant données, trouver la septième.

COROLLAIRE II.

8. Si l'on suppose que les trois arêtes montantes f, g, h, soient égales entre elles, la formule se réduira à

$$(f^2 - x^2)(2m^2n^2 + 2m^2p^2 + 2n^2p^2 - m^4 - n^4 - p^4) - m^2n^2p^2 = 0, \ldots (B)$$

ce qu'il est d'ailleurs facile d'appercevoir : car $f^2 - x^2$ étant égal à s^2, à r^2 et à q^2, à cause de $f = g = h$; s, r, q, seront trois rayons du cercle circonscrit à la base BCD. Or par le lemme I, on a en effet

$$s^2(2m^2n^2 + 2m^2p^2 + 2n^2p^2 - m^4 - n^4 - p^4) - m^2n^2p^2 = 0,$$

équation qui revient au même que la formule (B), à cause de $s^2 = f^2 - x^2$.

Si l'on supposait aussi les trois côtés m, n, p, de la base égaux entre eux, la formule (B) se réduirait à

$$x^2 = f^2 - \tfrac{1}{3}m^2; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(C)}$$

et enfin si l'on suppose $f = m$, on aura

$$x^2 = \tfrac{2}{3}m^2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(D)}$$

c'est le cas du *tétraèdre* régulier.

PROBLÈME III.

9. *Trouver la solidité d'une pyramide triangulaire en valeurs de ses six arêtes.*

Solution. Soient, comme dans le problème précédent,

m, n, p, les trois côtés ou arêtes de la base, FIG. 4.
f, g, h, les trois arêtes montantes respectivement opposées,
x........ la hauteur de la pyramide au-dessus de la base BCD,
S........ la solidité cherchée.

Le solide ou volume d'une pyramide étant égal au produit de la base par le tiers de la hauteur, nous aurons

$$S = \tfrac{1}{3}x \cdot \text{BCD}.$$

Or par le lemme I, on a

$$\text{BCD} = \tfrac{1}{4}\sqrt{(2m^2n^2 + 2m^2p^2 + 2n^2p^2 - m^4 - n^4 - p^4)}.$$

Substituant cette valeur de BCD dans l'équation précédente,

élevant ensuite tout au carré, puis substituant dans le résultat la valeur de x^2 tirée de la formule (A) du problème précédent, on aura la formule suivante qui satisfait à la question proposée,

$$\begin{aligned}9.16.S^2 &+ f^4m^2 + m^4f^2 + g^4n^2 + n^4g^2 + h^4p^2 + p^4h^2 \\ &+ m^2n^2p^2 + m^2g^2h^2 + n^2f^2h^2 + p^2f^2g^2 \\ &- m^2n^2f^2 - m^2n^2g^2 - m^2f^2g^2 - m^2f^2h^2 \\ &- m^2p^2f^2 - m^2p^2h^2 - n^2f^2g^2 - n^2g^2h^2 \\ &- n^2p^2g^2 - n^2p^2h^2 - p^2g^2h^2 - p^2f^2h^2 = 0, \ldots\ldots (A)\end{aligned}$$

ce qu'il fallait trouver.

COROLLAIRE I.

10. Puisque la formule (A) contient les sept quantités m, n, p, f, g, h, S; il est évident qu'elle résout cette question plus générale.

Parmi les sept quantités suivantes; savoir, les six arêtes d'une pyramide triangulaire et le solide de cette pyramide, six quelconques étant données, trouver la septième.

COROLLAIRE II.

11. Si l'on suppose que les trois arêtes montantes f, g, h, soient égales entre elles, la formule se réduira à

$$9.16S^2 = f^2(2m^2n^2 + 2m^2p^2 + 2n^2p^2 - m^4 - n^4 - p^4) - m^2n^2p^2 \ldots (B)$$

Si l'on suppose aussi les trois côtés m, n, p, de la base égaux entre eux, la formule (B) se réduira à

$$9.16.S^2 = 3f^2m^4 - m^6; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (C)$$

et enfin si l'on suppose $f = m$, ce qui est le cas du tétraèdre régulier, on aura

$$S = \frac{1}{6\sqrt{2}}m^3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (D).$$

PROBLÈME IV.

12. *Exprimer le rayon de la sphère circonscrite à une pyramide triangulaire, en valeurs de ces six arêtes.*

Solution. Soient, comme dans les problèmes précédens,

m, p, n, les trois côtés ou arêtes de la base; FIG. 4.
f, g, h, les trois arêtes montantes respectivement opposées;
S........ le solide de la pyramide;
R....... le rayon cherché de la sphère circonscrite.

Si du centre de cette sphère on imagine des droites menées aux quatre angles solides de la pyramide, ces droites qui seront elles-mêmes autant de rayons, partageront cette pyramide en quatre autres, dont on trouvera la solidité chacune en particulier par la formule (B) du problème précédent (11). Ajoutant donc ces quatre solidités partielles, et égalant leur somme à la solidité entière, donnée par la formule (A) du même problème, on aura, réduction faite après un long calcul, la formule suivante, qui satisfait à la question proposée

$$\begin{aligned} 4R^2 (f^4m^2 &+ m^4f^2 + g^4n^2 + n^4g^2 + h^4p^2 + p^4h^2 \\ &+ m^2g^2h^2 + p^2f^2g^2 + n^2f^2h^2 + m^2n^2p^2 \\ &- m^2n^2g^2 - n^2p^2g^2 - n^2f^2g^2 - m^2f^2g^2 \\ &- n^2g^2h^2 - p^2g^2h^2 - m^2n^2f^2 - m^2p^2f^2 \\ &- n^2p^2h^2 - m^2p^2h^2 - m^2f^2h^2 - p^2f^2h^2) \\ &+ 2n^2p^2g^2h^2 + 2m^2p^2f^2h^2 + 2m^2n^2f^2g^2 \\ &- m^4f^4 - g^4n^4 - h^4p^4 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A) \end{aligned}$$

ce qu'il fallait trouver.

COROLLAIRE I.

13. Puisque la formule (A) contient les sept quantités m, n, p, f, g, h, R, il est évident qu'elle résout cette question plus générale:

Parmi les sept quantités suivantes; savoir, les six arêtes d'une pyramide triangulaire et le rayon de la sphère circonscrite, six quelconques étant données, trouver la septième.

COROLLAIRE II.

14. Si l'on suppose que toutes les arêtes de la pyramide soient égales entre elles, ce qui est le cas du tétraèdre régulier, et que *m* soit prise pour représenter l'une quelconque de ces arêtes, on aura

$$R = m\sqrt{\tfrac{3}{8}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B).$$

PROBLÈME V.

15. *Trouver le rayon de la sphère inscrite à une pyramide triangulaire, en valeurs des six arêtes.*

Solution. Soient, comme dans les problèmes précédens,

FIG. 4. m, n, p, les trois côtés ou arêtes de la base;

f, g, h, les trois arêtes montantes respectivement opposées;

S........ le solide de la pyramide;

r........ le rayon cherché de la sphère inscrite.

Si du centre de cette sphère on imagine des droites menées aux quatre angles de la pyramide, ces droites partageront le solide ou volume de cette pyramide en quatre autres pyramides partielles, qu'on trouvera chacune en particulier, en multipliant sa base par le tiers de sa hauteur, qui est le rayon cherché. Donc la pyramide proposée étant la somme de toutes ces pyramides partielles, on aura

$$S = \tfrac{1}{3} r\,(BCD + ABC + ABD + ACD) \ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

Mais par le lemme I, on a chacune des aires BCD, ABC, ABD, ACD, en valeurs des six arêtes de la pyramide, et par le problème III (9) on a le solide S de la pyramide entière; substituant donc dans l'équation (A) toutes ces valeurs, nous aurons la formule suivante, qui satisfait à la question proposée:

$$r(\sqrt{(2m^2n^2+2m^2p^2+2n^2p^2-m^4-n^4-p^4)}+\sqrt{(2g^2h^2+2g^2m^2+2h^2m^2-g^4-h^4-m^4)}$$
$$+\sqrt{(2f^2g^2+2f^2p^2+2g^2p^2-f^4-g^4-p^4)}+\sqrt{(2f^2h^2+2f^2n^2+2h^2n^2-f^4-h^4-n^4)}$$
$$=\sqrt{(m^2n^2f^2+m^2n^2g^2+m^2f^2g^2+m^2f^2h^2+m^2p^2f^2+m^2p^2h^2+n^2f^2g^2+n^2g^2h^2}$$
$$+n^2p^2g^2+n^2p^2h^2+p^2g^2h^2+p^2f^2h^2-f^4m^2-m^4f^2-g^4n^2-n^4g^2-h^4p^2-p^4h^2$$
$$-m^2g^2h^2-n^2f^2h^2-p^2f^2g^2-m^2n^2p^2), \ldots\ldots \text{(B)}$$

ce qu'il fallait trouver.

16. Lagrange observe très-bien, qu'indépendamment de la sphère inscrite, il y en a quatre autres, qui sont aussi bien qu'elle tangentes, chacune aux quatre faces de la pyramide, mais qu'alors il y a toujours une de ces quatre faces qui n'est qu'extérieurement tangente à la sphère. Il est aisé, d'après cela, de trouver le rayon de ces quatre nouvelles sphères; car il n'y a qu'à regarder comme négative celle des faces à laquelle la sphère est extérieurement tangente, c'est-à-dire, donner successivement le signe — à chacun des radicaux qui les expriment. Par exemple, si l'on veut trouver le rayon de la sphère qui touche intérieurement les trois faces ABC, ABD, ACD, et extérieurement la face BCD, il n'y aura qu'à donner dans la formule précédente (B) le signe — au radical $\sqrt{(2m^2n^2+2m^2p^2+2n^2p^2-m^4-n^4-p^4)}$ qui exprime (lemme I) quatre fois l'aire du triangle BCD, ainsi des autres.

COROLLAIRE I.

17. Puisque la formule (B) contient les sept quantités m, n, p, f, g, h, r; il est évident qu'elle résout cette question plus générale :

Parmi les sept quantités suivantes ; savoir, les six arêtes d'une pyramide triangulaire, et le rayon de la sphère inscrite; six quelconques étant données, trouver la septième.

COROLLAIRE II.

18. Si l'on suppose que toutes les arêtes de la pyramide soient égales entre elles, ce qui est le cas du tétraèdre régulier, et que m soit prise pour représenter l'une quelconque de ces arêtes, on aura

$$r = m\sqrt{\tfrac{1}{24}} \ldots\ldots \text{(C)}$$

PROBLEME VI.

19. *Exprimer en valeurs des six arêtes d'une pyramide triangulaire, chacun des éloignemens de perpendicule; c'est-à-dire, la distance du pied de chacune de ses perpendiculaires, à chacun des angles de la face sur laquelle elle tombe.*

Solution. Soient, comme dans les problèmes précédens,

FIG. 4. m, n, p, les trois côtés ou arêtes de la base;
f, g, h, les trois arêtes montantes respectivement opposées;
x........ la hauteur du sommet A au-dessus de la base BCD;
$\overline{\mathrm{BE}}$...... l'éloignement de perpendicule qu'il s'agit de trouver.

Le triangle rectangle ABE donne $\overline{\mathrm{BE}}^2 = g^2 - x^2$; substituant dans cette équation la valeur de x^2 trouvée (6), on aura la formule suivante qui satisfait à la question proposée,

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{BE}}^2(2m^2n^2 + 2m^2p^2 + 2n^2p^2 - m^4 - n^4 - p^4) = \\ 2m^2p^2g^2 + g^2m^2n^2 + g^2n^2p^2 - m^4g^2 - p^4g^2 \\ + f^4m^2 + m^4f^2 + g^4n^2 + p^4h^2 + h^4p^2 \\ + m^2n^2p^2 + m^2p^2h^2 + n^2f^2h^2 + p^2f^2g^2 \\ - m^2n^2f^2 - m^2n^2g^2 - m^2f^2g^2 - m^2f^2h^2 \\ - m^2p^2f^2 - m^2p^2h^2 - n^2f^2g^2 - n^2g^2h^2 \\ - n^2p^2h^2 - p^2g^2h^2 - p^2f^2h^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(A)}\end{aligned}$$

ce qu'il fallait trouver.

COROLLAIRE.

20. Puisque la formule (A) contient les sept quantités m, n, p, f, g, h, $\overline{\mathrm{BE}}$, il est évident qu'elle résout cette question plus générale :

Parmi les sept quantités suivantes ; savoir, les six arêtes d'une pyramide triangulaire, et l'un quelconque des douze éloignemens de perpendicule; six quelconques étant données, trouver la septième.

PROBLEME VII.

21. *Exprimer en valeurs des six arêtes d'une pyramide triangulaire, la distance du pied de chacune des perpendiculaires, aux trois côtés de la face sur laquelle elle tombe.*

Solution. Soient, comme dans les problèmes précédens,

m, n, p, les trois côtés ou arêtes de la base; FIG. 5.

f, g, h, les trois arêtes montantes respectivement opposées;

x........ la hauteur du sommet A au-dessus de la base BCD;

$\overline{EF}$ ...... la distance cherchée du pied E de la perpendiculaire $\overline{AE}$ au côté $\overline{BC}$ de la base opposée BCD.

Du sommet A je mène $\overline{AF}$. Par le lemme I, j'ai la valeur de $\overline{AF}$ qui est perpendiculaire à $\overline{BC}$, et par le problème II (6), j'ai la hauteur $\overline{AE}$ ou x. Substituant donc ces valeurs de $\overline{AF}$ et x dans l'équation

$$\overline{EF}^2 = \overline{AF}^2 - x^2$$

que donne le triangle rectangle AFE, nous aurons la formule suivante qui satisfait à la question proposée,

$$\overline{EF}^2 (2m^2n^2 + 2m^2p^2 + 2n^2p^2 - m^4 - n^4 - p^4) =$$

$$\frac{1}{4m^2}(2m^2n^2 + 2m^2p^2 + 2n^2p^2 - m^4 - n^4p^4)(2g^2h^2 + 2g^2m^2 + 2h^2m^2 - g^4 - h^4 - m^4)$$
$$+ m^4f^2 + f^4m^2 + n^4g^2 + g^4n^2 + p^4h^2 + h^4p^2 + m^2n^2p^2 + m^2g^2h^2 + n^2f^2h^2 + p^2f^2g^2$$
$$- m^2n^2f^2 - m^2n^2g^2 - m^2f^2g^2 - m^2f^2h^2 - m^2p^2f^2 - m^2p^2h^2 - n^2f^2g^2 - n^2g^2h^2 - n^2p^2g^2$$
$$- p^2g^2h^2 - p^2h^2f^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

COROLLAIRE.

22. Puisque la formule (A) contient les sept quantités m, n, p, f, g, h, $\overline{EF}$; il est évident qu'elle résout cette question plus générale :

Parmi les sept quantités suivantes; savoir, les six arêtes d'une

pyramide triangulaire et la distance du pied de l'une quelconque des perpendiculaires à l'un des côtés de la base opposée ; six quelconques étant données, trouver la septième.

PROBLÈME VIII.

23. *Exprimer en valeurs des six arêtes d'une pyramide triangulaire, la distance de chacun de ses sommets au centre de gravité de cette pyramide.*

Solution. Soient, comme dans les problèmes précédens,

FIG. 4. m, n, p, les trois côtés ou arêtes de la base;
f, g, h, les trois arêtes montantes respectivement opposées;
y. . . . . . la distance cherchée du sommet A par exemple, au centre de gravité.

Par les propriétés connues des centres de figure ou de gravité, le carré de la distance de ce point à un autre point quelconque de l'espace, est égal à la somme des carrés des distances de cet autre point à tous ceux du système, multipliée par le nombre total des points de ce même système, moins la somme des carrés des distances respectives de tous ces points comparés deux à deux, le tout divisé par le carré du nombre total des points.

Or le nombre total des points du système, c'est-à-dire des sommets, est ici de quatre. Donc en prenant A pour le point de l'espace auquel on rapporte tous ces points du système, on aura

$$y^2 = \frac{4(f^2+g^2+h^2)-(m^2+n^2+p^2+f^2+g^2+h^2)}{16},$$

ou en réduisant

$$16y^2 = 3(f^2+g^2+h^2)-(m^2+n^2+p^2), \ldots\ldots (A)$$

ce qu'il fallait trouver.

COROLLAIRE.

24. Puisque la formule (A) contient les sept quantités m, n, p,

f, g, h, y; il est évident qu'elle donne la solution de cette question plus générale :

Parmi les sept quantités suivantes ; savoir, les six arêtes d'une pyramide triangulaire et la distance de l'un quelconque de ses sommets à son centre de gravité; six quelconques étant données, trouver la septième.

PROBLÈME IX.

25. *Exprimer en valeurs des arêtes d'une pyramide triangulaire, tous les angles formés par ces arêtes, deux à deux, aux quatre sommets de cette pyramide.*

Solution. Soient, comme dans les problèmes précédens,

m, n, p..... les trois côtés ou arêtes de la base; FIG. 4.
f, g, h..... les trois arêtes montantes respectivement opposées,
BAC ou $\widehat{gh}$, l'un des angles cherchés.

Cet angle étant l'un de ceux du triangle ABC, dont les trois côtés sont donnés, se trouvera immédiatement par le lemme I, sans que les arêtes f, n, p, entrent dans sa valeur, et l'on aura

$$\cos\widehat{gh} + \frac{g^2+h^2-m^2}{2gh} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

et ainsi de chacun des onze autres angles du même genre qui entrent dans la construction de la pyramide. *Ce qu'il fallait trouver.*

COROLLAIRE.

26. La formule précédente donne, en l'appliquant successivement aux trois angles du sommet A, les trois équations suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} 2gh\cos\widehat{gh} = g^2+h^2-m^2 \\ 2fg\cos\widehat{fg} = f^2+g^2-p^2 \\ 2fh\cos\widehat{fh} = h^2+f^2-n^2 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B)$$

Ajoutant ensemble toutes ces équations, on aura

$$2gh\cos\widehat{gh}+2fg\cos\widehat{fg}+2fh\cos\widehat{fh} = 2f^2+2g^2+2h^2-m^2-n^2-p^2 \ldots (C)$$

Si l'on compare cette équation avec la formule du problème précédent, et qu'on retranche l'une de l'autre, on aura

$$16y^2 = f^2 + g^2 + h^2 + 2fg\cos f\hat{}g + 2fh\cos f\hat{}h + 2gh\cos g\hat{}h \ldots\ldots (D)$$

ce qui donne la solution de ce problème.

Parmi les sept quantités suivantes; savoir, les trois arêtes qui partent du même sommet dans une pyramide triangulaire, les trois angles compris entre ces arêtes deux à deux, et la distance de ce sommet au centre de gravité de la pyramide; six quelconques étant données, trouver la septième.

PROBLÈME X.

27. *Exprimer en valeurs des six arêtes d'une pyramide triangulaire, l'angle formé par celles de ces arêtes qui sont respectivement opposées deux à deux; c'est-à-dire (vu qu'elles ne sont pas dans un même plan), l'angle que ferait avec l'une d'elles, la droite menée parallélement à l'autre, de l'un quelconque des points de la première.*

Solution. Je garde les dénominations du problème précédent:
FIG. 4. les arêtes respectivement opposées étant g et n, h et p, f et m; proposons-nous, par exemple, de trouver l'angle formé par g et n, c'est-à-dire, l'angle que formerait avec g ou $\overline{AB}$, une droite menée du point B parallélement à n ou $\overline{CD}$, angle que, d'après la notation expliquée (4), je désigne par $\overline{AB}\hat{}\overline{CD}$ ou $g\hat{}n$.

Pour rendre la figure plus nette, traçons-la de nouveau (fig. 6) avec la parallèle dont nous venons de parler, et soit $\overline{BO}$ cette parallèle au côté $\overline{CD}$.

Concevons une surface sphérique qui ait son centre au point B,
FIG. 6. et qui soit rencontrée par les droites $\overline{BA}$, $\overline{BO}$, $\overline{BD}$, $\overline{BC}$, aux points a, o, d, c, respectivement. Les plans qui contiennent ces droites deux à deux, formeront sur cette surface sphérique, un triangle sphérique ado, qui aura avec le premier acd, un angle commun en c. Cela posé, par le lemme II, les deux triangles sphé-

riques *adc*, *aco*, donneront les deux valeurs suivantes pour le cosinus de l'angle *acd* qui leur est commun :

$$\cos acd = \frac{\cos ad - \cos ac . \cos cd}{\sin ac . \sin cd},$$

$$\cos acd = \frac{\cos ao - \cos ac . \cos co}{\sin ac . \sin co};$$

égalant ces deux valeurs, et réduisant, on aura
$(\cos ao - \cos ac . \cos co) \sin cd = (\cos ad - \cos ac . \cos cd) \sin co \ldots (A)$
mais il est évident que $ac = ABC$, $co = OBC = \text{supp. } BCD$, $cd = CBD$, $ad = ABD$.

Or tous ces angles sont connus et faciles à exprimer en valeurs des arêtes de la pyramide; il n'y a donc plus rien d'inconnu dans l'équation précédente (A), que l'arc cherché *ao* qui est la mesure de l'angle cherché $\overline{BA}\hat{\ }\overline{CD}$ ou $g\hat{\ }n$.

L'équation précédente devient donc

$$(\cos g\hat{\ }n + \cos ABC . \cos BCD) \sin CBD =$$
$$(\cos ABD - \cos ABC . \cos CBD) \sin BCD \ldots\ldots\ldots (B)$$

d'où l'on tire $\cos g\hat{\ }n$ par une équation du premier degré en valeurs de ABC, BCD, CBD, ABC. Mais puisque nous voulons avoir cette inconnue en valeurs des arêtes seules de la pyramide, il faut chercher ces angles en valeurs des arêtes. Or, par le lemme I, nous avons (fig. 3)

$$\cos ABC = \frac{g^2 + m^2 - h^2}{2gm},$$

$$\cos BCD = \frac{m^2 + n^2 - p^2}{2mn},$$

$$\sin BCD = \frac{1}{2mn} \sqrt{(2m^2n^2 + 2m^2p^2 + 2n^2p^2 - m^4 - n^4 - p^4)},$$

$$\cos ABD = \frac{g^2 + p^2 - f^2}{2gp},$$

$$\cos CBD = \frac{m^2 + p^2 - n^2}{2mp},$$

$$\sin CBD = \frac{1}{2mp} \sqrt{(2m^2n^2 + 2m^2p^2 + 2n^2p^2 - m^4 - n^4 - p^4)}.$$

Substituant donc ces valeurs dans l'équation (B), et faisant dis-

paraître les dénominateurs, nous aurons la formule suivante qui satisfait à la question proposée,

$$2gn \cos g\hat{\ } n = h^2 + p^2 - f^2 - m^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (C)$$

ce qu'il fallait trouver.

COROLLAIRE.

28. Puisque la formule (C) contient les sept quantités suivantes, $m, n, p, f, g, h, g\hat{\ } n$; il est évident qu'elle résout cette question plus générale :

Parmi les sept quantités suivantes; savoir, les six arêtes d'une pyramide triangulaire, et l'un quelconque des trois angles formés par deux des arêtes opposées; six quelconques étant données, trouver la septième.

COROLLAIRE II.

29. Si l'on applique la formule (C) aux autres arêtes respectivement opposées m, f, et p, h; on aura, y compris la formule (C) elle-même, les trois équations suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} 2gn \cos g\hat{\ } n = h^2 + p^2 - f^2 - m^2 \\ 2fm \cos f\hat{\ } m = g^2 + n^2 - h^2 - p^2 \\ 2hp \cos h\hat{\ } p = f^2 + m^2 - g^2 - n^2 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (D)$$

Ajoutant ensemble ces trois équations, et réduisant, on aura cette formule symétrique assez remarquable

$$fm \cos f\hat{\ } m + gn \cos g\hat{\ } n + hp \cos h\hat{\ } p = 0 \ldots\ldots\ldots (E)$$

COROLLAIRE III.

30. On peut observer en passant, que si l'on suppose égale à
FIG. 3. zéro la hauteur de la pyramide, le point A tombera sur le point E, et que parconséquent cette pyramide deviendra un quadrilatère plan, sans que les formules (D) cessent de lui être applicables. Or ces formules deviennent

$$\left.\begin{aligned} 2ms\cos m\hat{}s &= q^2+n^2-r^2-p^2 \\ 2nq\cos n\hat{}q &= r^2+p^2-s^2-m^2 \\ 2pr\cos p\hat{}r &= s^2+m^2-q^2-n^2 \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(F)}$$

Ces formules peuvent être très-utiles dans la résolution du quadrilatère plan. La dernière, par exemple, donne la solution de ce problème :

Connaissant les quatre côtés d'un quadrilatère plan et l'angle compris entre les deux diagonales, trouver ces deux diagonales. Car les inconnues sont ici p, r; et pour les obtenir, il n'y a qu'à combiner cette dernière des équations (F) avec la formule (C) du problème I (5).

On résoudrait de même cette autre question :

Connaissant l'aire d'un quadrilatère plan et ses quatre côtés, trouver ses deux diagonales.

En effet, l'aire de ce quadrilatère est, comme l'on sait, la moitié du produit des diagonales multiplié par le sinus de l'angle compris; c'est-à-dire, $\frac{1}{2}pr\sin p\hat{}r$. Nommant donc a cette aire donnée, nous aurons $\frac{1}{2}pr\sin p\hat{}r = a$; divisant cette équation par la dernière des formules (F), on aura

$$\frac{\cos p\hat{}r}{\sin p\hat{}r},\text{ ou }\cot p\hat{}r = \frac{s^2+m^2-q^2-n^2}{4a^2}.$$

Or on connaît toutes les quantités qui entrent dans le dernier membre de cette équation. On connaîtra donc l'angle $p\hat{}r$, et le problème reviendra à celui dont nous venons d'indiquer la solution.

PROBLÈME XI.

31. *Exprimer en valeurs des six arêtes d'une pyramide triangulaire tous les angles compris entre les faces de cette pyramide deux à deux.*

Solution. Soient, comme dans les problèmes précédens,

FIG. 5. m, n, p, les trois côtés ou arêtes de la base;

f, g, h, les trois arêtes montantes respectivement opposées;

x........ la hauteur $\overline{AE}$ du sommet A au-dessus de la base BCD;

AFE..... est évidemment l'angle que forment entre elles les deux faces ABC, BCD, dont l'intersection est $\overline{BC}$, et par conséquent l'un de ceux qu'il faut trouver.

Or le triangle rectangle AFE donne $\sin AFE = \frac{\overline{AE}}{\overline{AF}}$, ou

$$\sin AFE \,.\, \overline{AF} = x.$$

Mais le problème II (6) donne x, et le lemme I donne $\overline{AF}$; substituant donc leurs valeurs dans l'équation précédente, on aura la formule suivante, qui satisfait à la question proposée,

$$\begin{aligned}\sin^2 AFE\,(2m^2n^2+2m^2p^2+2n^2p^2-m^4-n^4-p^4)(2g^2h^2+2g^2m^2+2h^2m^2-g^4-h^4-m^4)\\ +4m^2(m^4f^2+f^4m^2+n^4g^2+g^4n^2+p^4h^2+h^4p^2+m^2n^2p^2+m^2g^2h^2+n^2f^2h^2+p^2f^2g^2\\ -m^2n^2f^2-m^2n^2g^2-m^2f^2g^2-m^2f^2h^2-m^2p^2f^2-m^2p^2h^2-n^2f^2g^2-n^2g^2h^2-n^2p^2g^2\\ -n^2p^2h^2-p^2g^2h^2-p^2f^2h^2)=0 \quad \text{(A)}\end{aligned}$$

ce qu'il fallait trouver.

COROLLAIRE.

32. Puisque la formule (A) contient les sept quantités m, n, p; f, g, h, AFE, il est évident qu'elle résout cette question plus générale :

Parmi les sept quantités suivantes ; savoir, les six arêtes d'une pyramide triangulaire, et l'un quelconque des six angles compris entre les faces deux à deux ; six quelconques étant données, trouver la septième.

PROBLÈME XII.

33. *Exprimer en valeurs des six arêtes d'une pyramide triangulaire, les douze angles d'inclinaison de ces arêtes sur les faces.*

Solution. Je garde les dénominations du problème précédent; et je me propose de trouver, par exemple, l'angle ABE qui est celui de l'inclinaison de l'arête $\overline{AB}$ sur la face BCD. FIG. 5.

J'ai évidemment $\sin ABE = \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{x}{g}$; substituant dans cette équation pour x sa valeur donnée par la formule (A) du problème II (6), nous aurons la formule suivante, qui satisfait à la question proposée :

$$\begin{aligned}\sin^2 ABE . g^2 (2m^2n^2 + 2m^2p^2 + 2n^2p^2 - m^4 - n^4 - p^4) \\ + m^4f^2 + f^4m^2 + n^4g^2 + g^4n^2 + p^4h^2 + h^4p^2 \\ + m^2n^2p^2 + m^2g^2h^2 + n^2h^2f^2 + p^2g^2f^2 \\ - m^2n^2f^2 - m^2n^2g^2 - m^2g^2f^2 - m^2h^2f^2 \\ - m^2p^2f^2 - m^2p^2h^2 - n^2g^2f^2 - n^2g^2h^2 \\ - n^2p^2g^2 - n^2p^2h^2 - p^2g^2h^2 - p^2h^2f^2 = 0 \ldots\ldots (A)\end{aligned}$$

ce qu'il fallait trouver.

COROLLAIRE.

34. Puisque la formule (A) contient les sept quantités m, n, p, f, g, h, ABE; il est évident qu'elle résout cette question plus générale :

Parmi les sept quantités suivantes ; savoir, les six arêtes d'une pyramide triangulaire, et l'angle d'inclinaison de l'une quelconque des arêtes sur l'une des faces qu'elle rencontre ; six quelconques étant données, trouver la septième.

PROBLÈME XIII.

35. *Exprimer en valeurs des six arêtes d'une pyramide triangulaire, les douze angles que font ces arêtes avec les perpendiculaires adjacentes.*

Solution. Je garde les dénominations précédentes, et je me propose de trouver, par exemple, l'angle BAE, qui est celui que forme l'arête $\overline{AB}$ avec la perpendiculaire adjacente $\overline{AE}$.

J'ai évidemment $\cos \mathrm{BAE} = \frac{\overline{\mathrm{AE}}}{\mathrm{AB}} = \frac{x}{g}$.

Substituant dans cette équation pour x, sa valeur donnée par la formule (A) du problème II (6), nous aurons la formule suivante, qui satisfait à la question proposée,

$$
\begin{aligned}
\cos^2 \mathrm{BAE}.g^2(&2m^2n^2+2m^2p^2+2n^2p^2-m^4-n^4-p^4)\\
&+m^4f^2+f^4m^2+n^4g^2+g^4n^2+p^4h^2+h^4p^2\\
&+m^2n^2p^2+m^2g^2h^2+n^2h^2f^2+p^2g^2f^2\\
&-m^2n^2f^2-m^2n^2g^2-m^2g^2f^2-m^2h^2f^2\\
&-m^2p^2f^2-m^2p^2h^2-n^2g^2f^2-n^2g^2h^2\\
&-n^2p^2g^2-n^2p^2h^2-p^2g^2h^2-p^2h^2f^2=0\ldots\ldots(\mathrm{A})
\end{aligned}
$$

ce qu'il fallait trouver.

COROLLAIRE.

36. Puisque la formule (A) contient les sept quantités m, n, p, f, g, h, BAE; il est évident qu'elle résout cette question plus générale :

Parmi les sept quantités suivantes, savoir les six arêtes d'une pyramide triangulaire, et l'un quelconque des douze angles que forment les perpendiculaires avec les arêtes adjacentes, six quelconques étant données, trouver la septième.

PROBLÈME XIV.

37. *Exprimer en valeurs des six arêtes d'une pyramide triangulaire, les angles formés par chacune des perpendiculaires avec les trois faces adjacentes.*

Solution. Je conserve les dénominations précédentes, et je me propose, par exemple, de trouver l'angle FAE formé par la perpendiculaire $\overline{\mathrm{AE}}$ avec la face adjacente ABC. FIG. 5.

J'ai évidemment $\cos \mathrm{FAE} = \frac{\overline{\mathrm{AE}}}{\mathrm{AF}}$.

Substituant donc dans cette équation la valeur de $\overline{\mathrm{AE}}$, ou x tirée de l'équation (A) du problème II (6), et celle de $\overline{\mathrm{AF}}$ donnée par le lemme I, nous aurons la formule suivante, qui satisfait à la question proposée,

$$\begin{aligned}\cos^2\mathrm{FAE}&(2g^2h^2+2g^2m^2+2h^2m^2-g^4-h^4-m^4)(2m^2n^2+2m^2p^2+2n^2p^2-m^4-n^4-p^4)\\ &+4m^2(m^4f^2+f^4m^2+n^4g^2+g^4n^2+p^4h^2+h^4p^2\\ &\quad+m^2n^2p^2+m^2g^2h^2+n^2h^2f^2+p^2g^2f^2\\ &\quad-m^2n^2f^2-m^2n^2g^2-m^2g^2f^2-m^2h^2f^2\\ &\quad-m^2p^2f^2-m^2p^2h^2-n^2g^2f^2-n^2g^2h^2\\ &\quad-n^2p^2g^2-n^2p^2h^2-p^2g^2h^2-p^2h^2f^2)=0\ldots\ldots\mathrm{(A)}\end{aligned}$$

ce qu'il fallait trouver.

COROLLAIRE.

38. Puisque la formule (A) contient les sept quantités m, n, p, f, g, h, FAE, il est évident qu'elle résout cette question plus générale :

Parmi les sept quantités suivantes, savoir, les six arêtes d'une pyramide triangulaire, et l'un quelconque des douze angles formés par les perpendiculaires et les faces adjacentes, six quelconques étant données, trouver la septième.

PROBLEME XV.

39. *Exprimer en valeurs des six arêtes d'une pyramide triangulaire, tous les angles que forment entre eux les éloignemens de perpendicule.*

Solution. Je conserve les dénominations précédentes, et je me propose de trouver, par exemple, l'angle BEC, compris entre les deux éloignemens de perpendicule $\overline{\mathrm{EB}}$, $\overline{\mathrm{EC}}$. FIG. 5.

Par le lemme 1, nous avons

$$\cos\mathrm{BEC}=\frac{\overline{\mathrm{BE}}^2+\overline{\mathrm{CE}}^2-\overline{\mathrm{BC}}^2}{2\mathrm{BE}\,.\,\mathrm{CE}};$$

mais à cause des triangles rectangles ABE, ACE, on a $\overline{BE}^2 = g^2 - x^2$, $\overline{CE}^2 = h^2 - x^2$, et de plus on a $\overline{BC} = m$; donc l'équation précédente devient

$$\cos BEC = \frac{(g^2+h^2-m^2)-2x^2}{2\sqrt{(g^2-x^2)(h^2-x^2)}} \ldots\ldots (A)$$

formule dans laquelle, pour avoir l'inconnue cos BEC exprimée en valeurs des six arêtes, il n'y a plus qu'à substituer pour x sa valeur donnée par la formule (A) du problème II (6); *ce qu'il fallait trouver.*

COROLLAIRE.

40. Puisque ce problème donne la relation des sept quantités m, n, p, f, g, h, BEC, il est évident qu'il résout cette question plus générale:

Parmi les sept quantités suivantes, savoir, les six arêtes d'une pyramide triangulaire, et l'angle compris entre deux quelconques des éloignemens de perpendicule, six quelconques étant données, trouver la septième.

PROBLÈME XVI.

41. *Trouver en valeurs des six arêtes d'une pyramide triangulaire, la plus courte distance de deux quelconques des arêtes opposées, c'est-à-dire, la droite qui est en même temps perpendiculaire à l'une et à l'autre.*

Solution. Je garde les dénominations des problèmes précédens, et je me propose de trouver, par exemple, la plus courte distance
FIG. 5. de $\overline{AB}$ à $\overline{CD}$ ou de g à n.

FIG. 6. Reprenons la figure 6, qui nous a déjà servi à trouver l'angle $\hat{gn}$, compris entre les deux droites dont nous cherchons maintenant la distance. Puisque, par hypothèse, $\overline{BO}$ est parallèle à $\overline{CD}$, le plan ABO sera aussi parallèle à la même droite $\overline{CD}$, et par conséquent, la distance cherchée est la même que celle d'un

point quelconque de la droite $\overline{CD}$, par exemple du point C, à ce plan ABO.

Cela posé, j'abaisse du point C une perpendiculaire $\overline{Cu}$ sur $\overline{BO}$; et je mène $\overline{Au}$; CBAu sera donc une pyramide triangulaire qui, en prenant C pour sommet, aura pour base ABu, et il est évident que la distance cherchée n'est autre chose que la hauteur de cette pyramide. Or nous avons (6) une formule qui nous donne la hauteur d'une pyramide triangulaire en valeurs de ses arêtes. Il n'y a donc qu'à chercher d'abord les six arêtes de la pyramide CBAu, en valeurs des six arêtes de la pyramide proposée ABCD; et les substituer dans la formule dont nous venons de parler.

Or, parmi les six arêtes cherchées de la pyramide CBAu, il y en a déjà trois de connues, savoir, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, qui lui sont communes avec la pyramide proposée.

Quant aux arêtes $\overline{Cu}$, $\overline{Bu}$, on les a par la proportionnalité des sinus avec les côtés, dans le triangle rectiligne BCu, qui donne $\overline{Cu}=\overline{BC}.\sin CBO=\overline{BC}.\sin BCD$ et $\overline{Bu}=-\overline{BC}.\cos BCD$; il reste donc à trouver $\overline{Au}$.

Mais par le lemme I, nous avons dans le triangle ABu

$$\overline{Au}^2=\overline{AB}^2+\overline{Bu}^2-2\overline{AB}.\overline{Bu}.\cos ABu.$$

Or $\overline{AB}$ est donnée; $\overline{Bu}$ vient d'être trouvée, et ABO est précisément l'angle $\overline{AB}\hat{\ }\overline{CD}$, ou $g\hat{\ }n$ trouvé dans le problème précédent.

Nous avons donc tout ce qu'il faut pour appliquer à la hauteur cherchée de la pyramide CBAu la formule trouvée (6); car, d'après ce qui vient d'être dit, on aura, comme il suit, les six arêtes de cette pyramide en valeurs des six arêtes de la proposée (fig. 5 et 6).

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{AB}=g,\ \overline{AC}=h,\ \overline{BC}=m\\
&\overline{Bu}=\frac{1}{2n}(p^2-m^2-n^2)\\
&\overline{Cu}=\frac{1}{2n}\sqrt{(2m^2n^2+2m^2p^2+2n^2p^2-m^4-n^4-p^4)}\\
&\overline{Au}=\frac{1}{2n}\sqrt{(n^4-m^4-p^4+4g^2n^2+2m^2p^2+2h^2m^2+2h^2n^2+2f^2p^2-2k^2m^2}\\
&\qquad\qquad\overline{-2f^2n^2-2h^2p^2)}
\end{aligned}\right\}\ldots(A)$$

De ces six arêtes, toutes exprimées en valeurs des données, les trois $\overline{AB}$, $\overline{Bu}$, $\overline{Au}$ sont les côtés de la base ABu, et les trois autres $\overline{Cu}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ sont les arêtes montantes, c'est-à-dire, partant du sommet C et respectivement opposées à ces côtés. Donc, pour appliquer au cas présent la formule trouvée (6), il n'y a qu'à y substituer $\overline{AB}$ pour m, $\overline{Bu}$ pour n, $\overline{Au}$ pour p, $\overline{Cu}$ pour f, $\overline{AC}$ pour g et $\overline{BC}$ pour h; c'est-à-dire, mettre dans cette formule, au lieu de m, n, p, f, g, h, les quantités trouvées ci-dessus (A) pour $\overline{AB}$, $\overline{Bu}$, $\overline{Au}$, $\overline{Cu}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, respectivement; et alors x exprimera par une équation du deuxième degré sans second terme, et en valeurs des six arêtes de la pyramide proposée, la hauteur cherchée de C, au-dessus de la base ACu, de la nouvelle pyramide CABu, ou, ce qui revient au même, la plus courte distance des arêtes opposées $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ de la pyramide proposée, dont les trois arêtes à la base sont m, n, p, et les trois arêtes montantes respectivement opposées sont f, g, h; *ce qu'il fallait trouver.*

COROLLAIRE.

42. Puisque ce problème donne la relation de ces sept quantités m, n, p, f, g, h, *distance de* g *à* n, il est évident qu'il résout cette question plus générale :

Parmi ces sept quantités, savoir, les six arêtes d'une pyramide triangulaire, et la distance de deux quelconques des arêtes opposées, six quelconques étant données, trouver la septième.

PROBLÈME XVII.

43. *Exprimer en valeurs des six arêtes d'une pyramide triangulaire, l'angle formé par les deux rayons de la sphère circonscrite, menés aux extrémités d'une même arête.*

Solution. Je garde les dénominations précédentes, et je me propose de trouver, par exemple, l'angle compris entre les rayons menés du centre de la sphère circonscrite, aux extrémités B, C de l'arête $\overline{BC}$ ou m. FIG. 4.

Soit m' l'angle cherché. Le triangle formé par les deux rayons en question et le côté $\overline{BC}$ étant isoscèle, nous aurons par la première formule du lemme 1, $\cos m' = \frac{2R^2 - m^2}{2R^2}$ ou

$$2(1 - \cos m')R^2 = m^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (A).$$

Substituant dans cette équation la valeur de R^2 donnée par la formule (A) du problème IV (10), nous aurons

$$\begin{aligned}(1-\cos m')(g^4n^4+f^4m^4+h^4p^4-2g^2h^2n^2p^2-2f^2h^2m^2p^2-2g^2f^2m^2n^2)\\ = 2m^2\,(g^4n^4+n^4g^2+f^4m^2+m^4f^2+h^4p^2+p^4h^2\\ -g^2m^2n^2-g^2n^2p^2-g^2f^2n^2-g^2f^2m^2-g^2h^2n^2-g^2h^2p^2\\ -f^2m^2n^2-f^2m^2p^2-h^2n^2p^2-h^2m^2p^2-f^2h^2m^2-f^2h^2p^2)\ldots(B)\end{aligned}$$

ce qu'il fallait trouver.

COROLLAIRE.

44. Puisque la formule (A) contient les sept quantités m, n, p, f, g, h, m', il est évident qu'elle donne la solution de cette question plus générale :

Parmi les sept quantités suivantes, savoir, les six arêtes d'une pyramide triangulaire, et l'un quelconque des angles formés au centre de la sphère circonscrite, par les rayons menés aux quatre sommets de la pyramide, six quelconques étant données, trouver la septième.

PROBLÈME XVIII.

45. *Parmi toutes les quantités qui entrent dans la construction d'une pyramide triangulaire, six quelconques étant données, suffisantes pour que le reste soit déterminé, trouver toutes les autres.*

Solution. J'observe d'abord que les six données doivent être en effet suffisantes pour que tout le reste soit déterminé; car si, par exemple, on donnait six angles seulement, il est évident qu'on ne pourrait déterminer la valeur absolue des arêtes, mais seulement leurs rapports, puisque toutes les pyramides semblables ont les mêmes angles. Il en serait de même, si des six choses données, il s'en trouvait quatre appartenantes à un même triangle soit rectiligne, soit sphérique, puisque trois d'entre elles suffisant pour déterminer la quatrième, c'est en effet comme si l'on ne donnait que trois de ces quantités, au lieu de quatre.

Cela posé, qu'on cherche par les formules trouvées dans les problèmes précédens chacune des six données, en valeurs des six arêtes; qu'ensuite, considérant ces six arêtes comme les inconnues, on tire la valeur de chacune d'elles en données; il n'y aura plus, pour avoir en valeurs de ces mêmes données, chacune des autres quantités qui entrent dans la construction de la pyramide, qu'à substituer dans l'expression que par les problèmes précédens, on a de cette autre quantité en valeurs des arêtes, l'expression qu'on vient de trouver de chacune de celles-ci en valeurs des données; *ce qu'il fallait trouver.*

Remarque.

46. Si l'on voulait se borner à rechercher la relation qui existe entre les quantités angulaires de la pyramide, cinq de ces quantités suffiraient pour trouver toutes les autres. Par exemple, si parmi les six angles que forment les faces deux à deux, on en connaît cinq, il est évident que le sixième sera déterminé; qu'ensuite avec ces six angles on aura par la seconde formule du lemme II, tous ceux que forment les arêtes entre elles à chacun

des sommets ; puis par la troisième formule du même lemme, tous ceux que forment les arêtes avec les faces.

Ainsi, de même que nous avons exprimé toutes les parties, tant linéaires qu'angulaires de la pyramide, en valeurs de ses six arêtes ; nous pourrions nous proposer d'exprimer toutes ses parties angulaires seulement, en valeurs des six angles compris entre les faces deux à deux ; pourvu toutefois qu'on ait commencé par établir l'équation de condition qui lie entre eux ces six angles, puisqu'il suffit de cinq d'entre eux pour que le sixième soit déterminé.

47. Au lieu des six angles formés par les faces deux à deux, nous pourrions prendre pour données, six autres angles quelconques : par exemple, ceux que forment deux à deux au centre de la sphère circonscrite, les rayons menés de ce centre aux quatre sommets de la pyramide ; pourvu que l'on commençât encore par établir l'équation de condition qui lie tous ces angles entre eux.

Cette équation serait facile à trouver dans le cas présent, d'après le problème XVII ; car par la formule (A) de ce problème, nous avons

$$m^2 = 2R^2 (1 - \cos m').$$

Par conséquent, en nommant de même n', p', g', h', f', les angles formés respectivement par les deux rayons qui aboutissent aux extrémités des arêtes n, p, g, h, f ; nous aurons les six équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} m^2 &= 2R^2(1 - \cos m') \\ n^2 &= 2R^2(1 - \cos n') \\ p^2 &= 2R^2(1 - \cos p') \\ g^2 &= 2R^2(1 - \cos g') \\ h^2 &= 2R^2(1 - \cos h') \\ f^2 &= 2R^2(1 - \cos f') \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(B)}.$$

Donc si dans toutes les formules trouvées par la série des problèmes donnés, on substitue pour les quantités m^2, n^2, p^2, g^2, h^2, f^2, qui expriment les carrés des six arêtes, leurs valeurs qu'on vient de trouver (B), on aura l'expression de chacune des quantités du système, en valeurs du seul rayon R de la sphère circonscrite,

et des six angles formés au centre par les rayons menés aux quatre sommets de la sphère. Mais comme cela fait sept quantités, et qu'il ne doit y avoir que six données; il faut faire disparaître un de ces six angles par l'équation de condition qui les lie entre eux; il reste donc à trouver cette équation de condition.

Cela sera facile en reprenant la formule (A) du problème IV (12), car si l'on y substitue les valeurs trouvées ci-dessus (B) de m^2, n^2, p^2, f^2, g^2, h^2; il est visible que toute l'équation se trouvera, après la substitution, divisible par R^8; donc celle qui restera sera une simple équation de relation entre les six angles m', n', p', f', g', h'; et c'est ce que l'on cherche. Mais puisque toute l'équation doit être divisible par R^8, il est évident qu'on abrégera l'opération en supposant $R = 1$; c'est-à-dire, en substituant simplement au lieu des quantités m^2, n^2, p^2, g^2, h^2, f^2, celles-ci, $2(1 - \cos m')$, $2(1 - \cos n')$, $2(1 - \cos p')$, $2(1 - \cos g')$, $2(1 - \cos h')$; $2(1 - \cos f')$ ce qui étant exécuté donnera, réduction faite,

$$\begin{aligned}
&1 - \cos^2 m' - \cos^2 n' - \cos^2 p' - \cos^2 f' - \cos^2 g' - \cos^2 h' \\
&+ \cos^2 m' \cos^2 f' + \cos^2 n' \cos^2 g' + \cos^2 p' \cos^2 h' + 2\cos m' \cos n' \cos p' \\
&+ 2\cos m' \cos g' \cos h' + 2\cos n' \cos h' \cos f' + 2\cos g' \cos h' \cos f' \\
&- 2\cos m' \cos n' \cos f' \cos g' - 2\cos m' \cos f' \cos p' \cos h' \\
&- 2\cos n' \cos g' \cos p' \cos h' = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (C)
\end{aligned}$$

Telle est l'équation de condition qui, avec les six trouvées (B), donne le moyen d'exprimer en valeur du rayon R et de cinq quelconques, des angles m', n', p', f', g', h', toutes les quantités du système.

S'il ne s'agit que d'avoir les quantités angulaires; comme alors R doit disparaître, il sera plutôt fait, comme ci-dessus, de supposer $R = 1$. C'est de la relation de ces diverses quantités angulaires seulement, que nous allons maintenant nous occuper; après quoi, nous viendrons à notre question principale qui consiste, suivant le titre de ce Mémoire, à trouver la relation existante entre les distances de cinq points quelconques pris à volonté dans l'espace.

PROBLÈME XIX.

48. *Des six arcs de grands cercles qui joignent deux à deux quatre points quelconques pris sur la surface d'une sphère, cinq quelconques étant donnés, trouver le sixième.*

Solution. Soient B, C, D, E, les quatre points proposés sur la surface de la sphère ; BC, BD, BE, CD, CE, DE, les six arcs de grands cercles qui joignent ces points deux à deux; il en résultera le quadrilatère sphérique BCDE, dont les quatre côtés sont BC, CD, DE, BE, et les diagonales BD, CE, et il s'agit de trouver la relation qui existe entre ces côtés et ces diagonales. FIG. 5.

J'appellerai arcs opposés ceux qui n'ont point d'extrémités communes : ainsi les six arcs du quadrilatère sont opposés deux à deux ; savoir, le côté BC au côté DE, le côté CD au côté BE, et la diagonale BD à la diagonale CE; mais on peut considérer dans tout quadrilatère les côtés comme diagonales, et les diagonales comme côtés. Ainsi nous dirons en général que les côtés sont opposés deux à deux, et cela devra s'entendre aussi des diagonales.

Observons, en passant, deux choses : premièrement, que des trois arcs BC, CD, BD qui forment, par exemple, le triangle sphérique BCD, il n'y en a point qui soient opposés entre eux; mais qu'ils sont tous respectivement opposés chacun à chacun des trois arcs s, q, r, qui partent du quatrième angle E; et la même chose a lieu pour chacun des autres triangles BED, CBE, CDE, qui ont leurs sommets aux angles du quadrilatère. Secondement, que si du centre A de la surface sphérique sur laquelle est tracé FIG. 6.
le quadrilatère, on imagine des rayons menés aux quatre angles B, C, D, E, ceux de ces rayons qui embrasseront l'un des arcs, seront l'un et l'autre différens des deux rayons qui embrasseront l'autre arc; au lieu que lorsqu'il s'agit d'arcs qui ne sont pas opposés, il y a parmi les rayons qui les embrassent, un de ces rayons qui appartient en même temps aux deux arcs, et l'on voit que ces quatre rayons forment les quatre arêtes d'une pyramide quadrangulaire, dans laquelle nous appellerons faces opposées, celles qui

sont comprises l'une entre deux quelconques de ces quatre rayons, l'autre entre les deux autres, sans qu'il y ait aucun de ces rayons commun à l'une et à l'autre. Ainsi il y a au sommet d'une pyramide quadrangulaire ABCDE, six faces qui sont opposées deux à deux; savoir, ABC et ADE; ACD et ABE; ABD et ACE.

D'après ces éclaircissemens, nous allons reprendre la solution de notre problème. Soient donc dans le quadrilatère considéré BCDE,

FIG. 7.

m, n, p, les trois arcs ou côtés BC, CD, BD, de l'un quelconque des quatre triangles qui ont leurs sommets aux angles du quadrilatère.

s, q, r, les trois arcs ou côtés ED, EB, EC, respectivement opposés aux premières.

Par le lemme III (3), nous avons entre les trois angles qui ont leur sommet au point B, par exemple; savoir, CBE, CBD, DBE, dont l'un est la somme des deux autres : nous avons, dis-je, l'équation suivante :

$$1-\cos^2\text{CBE}-\cos^2\text{CBD}-\cos^2\text{BDE}+2\cos\text{CBE}.\cos\text{CBD}.\cos\text{DBE}=0\ldots\ldots(\text{A})$$

Mais le lemme II (2) nous donne pour trouver les angles qui entrent dans cette formule, les trois autres équations

$$\left.\begin{aligned}\cos\text{CBE}&=\frac{\cos r-\cos m.\cos q}{\sin m.\sin q}\\ \cos\text{CBD}&=\frac{\cos n-\cos m.\cos p}{\sin m.\sin p}\\ \cos\text{DBE}&=\frac{\cos s-\cos p.\cos q}{\sin p.\sin q}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\text{B})$$

Substituant ces valeurs dans l'équation précédente (A), on aura, après avoir fait disparaître les dénominateurs, et multiplié par $\sin^2 m.\sin^2 p.\sin^2 q$, l'équation suivante :

$$\begin{aligned}&\sin^2 m.\sin^2 p.\sin^2 q-\sin^2 p(\cos r-\cos m.\cos q)^2\\ &-\sin^2 q(\cos n-\cos m.\cos p)^2-\sin^2 m(\cos s-\cos p.\cos q)^2\\ &+2(\cos r-\cos m.\cos q)(\cos n-\cos m.\cos p)(\cos s-\cos p.\cos q)=0\ldots\ldots\ldots(\text{C})\end{aligned}$$

Il ne s'agit donc plus que d'effectuer les opérations indiquées, et de mettre ensuite à la place de $\sin^2 m$, $\sin^2 p$, $\sin^2 q$, leurs valeurs

respectives, $1 - \cos^2 m$, $1 - \cos^2 p$, $1 - \cos^2 q$; alors on obtiendra la formule suivante qui satisfait à la question proposée,

$$\begin{aligned}
&1 - \cos^2 m - \cos^2 n - \cos^2 p - \cos^2 q - \cos^2 r - \cos^2 s \\
&+ \cos^2 m \,.\, \cos^2 s + \cos^2 n \,.\, \cos^2 q + \cos^2 p \,.\, \cos^2 r \\
&+ 2 \cos m \,.\, \cos n \,.\, \cos p + 2 \cos m \,.\, \cos q \,.\, \cos r \\
&+ 2 \cos n \,.\, \cos r \,.\, \cos s + 2 \cos p \,.\, \cos q \,.\, \cos s \\
&- 2 \cos m . \cos n . \cos q . \cos s - 2 \cos m . \cos p . \cos r . \cos s \\
&- 2 \cos n . \cos p . \cos q . \cos r = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (D)
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait trouver.

Il est à remarquer que dans cette formule il n'entre que les cosinus des arcs proposés, et que chacun d'eux ne s'y trouve élevé qu'au carré, d'où il suit que l'équation à résoudre n'est jamais que du second degré. Cette formule revient au même que celle qui a déjà été trouvée (47), comme cela doit être évidemment.

PROBLÈME XX.

49. *Des six angles que forment entre elles deux à deux les quatre arêtes qui partent du sommet d'une pyramide quadrangulaire, cinq quelconques étant donnés, trouver le sixième.*

Solution. Soit A le sommet de la pyramide quadrangulaire FIG. 8.
proposée, BCDE sa base, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$, les quatre arêtes qui partent du sommet. Ces quatre arêtes prises deux à deux, forment évidemment six angles, et la question est de trouver l'un quelconque de ces angles lorsque les cinq autres sont donnés.

Prenons A pour le centre d'une sphère, et supposons que les quatre arêtes de la pyramide aillent rencontrer la surface de cette sphère aux points B', C', D', E', respectivement. Joignons ces points deux à deux par un arc de grand cercle; il en résultera visiblement un quadrilatère sphérique B'C'D'E', dont les quatre côtés et les deux diagonales sont précisément les mesures respectives des six angles que nous avons à considérer. Donc nous pouvons appli-

quer à ces six angles la formule (D) du problème précédent ; c'est-à-dire que si nous faisons (4),

$$\overline{AB}\hat{}\overline{AC} = m, \quad \overline{AC}\hat{}\overline{AD} = n, \quad \overline{AB}\hat{}\overline{AD} = p;$$
$$\overline{AE}\hat{}\overline{AD} = s, \quad \overline{AE}\hat{}\overline{AB} = q, \quad \overline{AC}\hat{}\overline{AE} = r,$$

on aura la formule suivante qui satisfait à la question proposée,

$$\begin{aligned} &1 - \cos^2 m - \cos^2 n - \cos^2 p - \cos^2 q - \cos^2 r - \cos^2 s \\ &+ \cos^2 m \,.\, \cos^2 s + \cos^2 n \,.\, \cos^2 q + \cos^2 p \,.\, \cos^2 r \\ &+ 2 \cos m \,.\, \cos n \,.\, \cos p + 2 \cos m \,.\, \cos q \,.\, \cos r \\ &+ 2 \cos n \,.\, \cos r \,.\, \cos s + 2 \cos p \,.\, \cos q \,.\, \cos s \\ &- 2\cos m . \cos n . \cos q . \cos s - 2\cos m . \cos p . \cos r . \cos s \\ &- 2\cos n . \cos p . \cos q . \cos r = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A) \end{aligned}$$

ce qu'il fallait trouver.

Il ne faut pas oublier d'observer que les trois angles s, q, r, sont respectivement opposés aux trois premiers m, n, p, conformément à l'explication qui a été donnée dans le problème précédent.

PROBLEME XXI.

50. *Des six angles que forment entre elles deux à deux quatre droites menées d'un point pris à volonté dans l'espace, suivant des directions quelconques ; cinq quelconques étant donnés, trouver le sixième.*

Solution. Les quatre droites proposées peuvent être considérées comme les quatre arêtes d'une pyramide quadrangulaire, réunies au point pris à volonté dans l'espace, on peut donc appliquer aux six angles que ces droites forment entre elles la formule (A) du problème précédent ; c'est-à-dire, que si ayant désigné ces quatre
FIG. 8. droites par f, g, h, l, nous faisons (4)

$$g\hat{}h = m, \quad h\hat{}f = n, \quad f\hat{}g = p, \quad f\hat{}l = s, \quad g\hat{}l = q, \quad h\hat{}l = r,$$

s, q, r, étant les trois angles respectivement opposés aux premiers m, n, p, on aura la formule suivante qui satisfait à la question

proposée,

$$\begin{aligned}1 &- \cos^2 m - \cos^2 n - \cos^2 p - \cos^2 q - \cos^2 r - \cos^2 s\\ &+ \cos^2 m \,.\, \cos^2 s + \cos^2 n \,.\, \cos^2 q + \cos^2 p \,.\, \cos^2 r\\ &+ 2\cos m \,.\, \cos n \,.\, \cos p + 2\cos m \,.\, \cos q \,.\, \cos r\\ &+ 2\cos n \,.\, \cos r \,.\, \cos s + 2\cos p \,.\, \cos q \,.\, \cos s\\ &- 2\cos m.\cos n.\cos q.\cos s - 2\cos m.\cos p.\cos r.\cos s\\ &- 2\cos n.\cos p.\cos q.\cos r = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(A)}\end{aligned}$$

ce qu'il fallait trouver.

Soit ABCD la projection d'un quadrilatère gauche quelconque; et soient m, n, q, s, p, r, les six angles formés par les côtés de ce quadrilatère gauche deux à deux, $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, représentant les deux côtés opposés; $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, les deux autres; de manière que m est l'angle compris entre les côtés représentés en projection par $\overline{AB}$, $\overline{AD}$; s l'angle compris entre les côtés respectivement opposés aux premiers; n l'angle compris entre les côtés représentés par $\overline{BA}$, $\overline{BC}$; q l'angle compris entre les côtés respectivement opposés à ceux-ci; r l'angle compris entre les côtés représentés par $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, ou plutôt à cause que les droites ne sont pas dans le même plan, l'angle compris entre $\overline{AB}$ et une autre droite menée d'un point quelconque de celle-ci parallélement à $\overline{CD}$. FIG. 8, bis.

Cela posé, par l'un des angles du quadrilatère gauche, par exemple, par celui dont la projection est D, j'imagine deux droites $\overline{DF'}$, $\overline{DE'}$, respectivement parallèles à $\overline{BA}$, $\overline{BC}$; et je désigne les quatre directions $\overline{DA}$, $\overline{DC}$, $\overline{DE'}$, $\overline{DF'}$ prises en partant du point D par g, l, f, k; il est visible qu'on aura

$$g\hat{\ }h = m,\ h\hat{\ }f = n,\ g\hat{\ }l = q,\ f\hat{\ }l = s,\ f\hat{\ }g = \text{sup}.p,\ h\hat{\ }l = \text{sup}.r.$$

Or les quatre directions g, h, f, l, partant d'un même point, la formule trouvée ci-dessus est applicable aux six angles

$$g\hat{\ }h,\ h\hat{\ }f,\ g\hat{\ }l,\ f\hat{\ }l,\ f\hat{\ }g,\ h\hat{\ }l;$$

mettant donc pour ces angles leurs valeurs m, n, q, s, sup.p, sup.r, on aura à cause de $\cos \text{sup}.p = -\cos p$, $\cos \text{sup}.r = -\cos r$, la

formule suivante, qui exprimera la relation existante entre les six angles que forment entre eux, deux à deux, les quatre côtés d'un quadrilatère gauche quelconque,

$$\begin{aligned} 1 &- \cos^2 m - \cos^2 n - \cos^2 p - \cos^2 q - \cos^2 r - \cos^2 s \\ &+ \cos^2 m \ \cos^2 s + \cos^2 n \ \cos^2 q + \cos^2 p \ \cos^2 r \\ &- 2 \cos m \ \cos n \ \cos p - 2 \cos m \ \cos q \ \cos r \\ &- 2 \cos n \ \cos r \ \cos s - 2 \cos p \ \cos q \ \cos s \\ &- 2 \cos m \ \cos n \ \cos q \ \cos s - 2 \cos m \ \cos p \ \cos r \ \cos s \\ &- 2 \cos n \ \cos p \ \cos q \ \cos r = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (B) \end{aligned}$$

PROBLÊME XXII.

51. *Des six angles que forment entre elles, deux à deux, les quatre faces d'une pyramide triangulaire, cinq quelconques étant donnés, trouver le sixième.*

Solution. D'un point quelconque pris au-dedans de la pyramide proposée, concevons une droite perpendiculaire sur chacune des faces. Il est évident que ces perpendiculaires formeront deux à deux des angles qui seront les supplémens de ceux que comprennent les faces sur lesquelles elles tombent. Or on sait que le cosinus d'un angle est toujours égal au cosinus de son supplément pris négativement. Donc, pour appliquer la formule trouvée dans le problème précédent aux six angles formés par les faces de la pyramide, il n'y a qu'à changer le signe de chacun des cosinus qui entrent dans la formule; c'est-à-dire, que si ayant désigné les quatre faces de la pyramide par F, G, H, L, nous faisons (4)

$$G\hat{}H = m, \quad H\hat{}F = n, \quad F\hat{}G = p, \quad F\hat{}L = s, \quad G\hat{}L = q, \quad H\hat{}L = r.$$

s, q, r étant les trois angles respectivement opposés aux premiers m, n, p, on aura la formule suivante qui satisfait à la question proposée,

$$\begin{aligned} 1 &- \cos^2 m - \cos^2 n - \cos^2 p - \cos^2 q - \cos^2 r - \cos^2 s \\ &+ \cos^2 m . \cos^2 s + \cos^2 n . \cos^2 q + \cos^2 p . \cos^2 r \\ &- 2 \cos m . \cos n . \cos p - 2 \cos m . \cos q . \cos r \\ &- 2 \cos n . \cos r . \cos s - 2 \cos p . \cos q . \cos s \\ &- 2 \cos m . \cos n . \cos q . \cos s - 2 \cos m . \cos p . \cos r . \cos s \\ &- 2 \cos n . \cos p . \cos q . \cos r = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (A) \end{aligned}$$

ce qu'il fallait trouver.

Il faut remarquer que d'après l'explication donnée (48), les angles opposés deux à deux, parmi les six que forment entre elles les faces d'une pyramide triangulaire, sont ceux qui sont compris respectivement entre les faces qui se coupent suivant les arêtes opposées. Ainsi, par exemple (fig. 5), l'angle compris entre les deux faces qui se coupent suivant $\overline{AB}$, est l'angle opposé à celui qui est compris entre les deux faces dont $\overline{CD}$ est l'interjection. Ainsi des autres.

PROBLEME XXIII.

52. *Des six angles que forment entre eux les quatre côtés d'un quadrilatère sphérique, prolongés jusqu'à leurs rencontres respectives, cinq quelconques étant donnés, trouver le sixième.*

Solution. Soit ABCD le quadrilatère sphérique proposé. Prolongeons les côtés opposés BA, CD, jusqu'à leur rencontre en F, et les autres côtés opposés AD, BC, jusqu'à leur rencontre en E; les six angles que forment entre eux les côtés de ce quadrilatère deux à deux ainsi prolongés, sont donc BAD, ABC, BCD, CAD, AFD, AED; et la question est de trouver l'un quelconque de ces angles lorsque les cinq autres sont donnés. FIG. 9.

Du centre de la sphère sur la surface de laquelle est tracé ce quadrilatère, imaginons des rayons menés aux six points A, B, C, D, E, F; et par ces droites deux à deux, concevons les plans qui doivent couper la surface sphérique suivant les quatre grands arcs de cercle BAF, CDF, ADE, BCE.

Cela posé, d'un point quelconque K de l'espace, concevons une droite perpendiculairement abaissée sur chacune des faces, et soient $\overline{Kt}$, $\overline{Ku}$, $\overline{Kv}$, $\overline{Kx}$, ces quatre perpendiculaires. Les angles formés par ces quatre perpendiculaires entre elles, deux à deux, sont les supplémens respectifs des angles formés par ces faces entre elles; c'est-à-dire, qu'en nommant ϖ le quart de la circonférence, on aura $ukt = 2\varpi -$ BAD, etc., ou

$$ukt = 2\varpi - AB\hat{\ }AD,\quad ukv = 2\varpi - BA\hat{\ }BC,\quad tkv = 2\varpi - ED\hat{\ }EC,$$
$$vkx = 2\varpi - CB\hat{\ }CD,\quad tkx = 2\varpi - DA\hat{\ }DC,\quad ukx = 2\varpi - FA\hat{\ }FD.$$

Mais la formule trouvée (50) est applicable aux six angles *ukt*, *ukv*, *tkv*, *ukx*, *tkx*, *ukx*, formés par les quatre droites qui partent du point *k*, et dont les trois derniers sont respectivement opposés aux trois premiers; donc pour appliquer la même formule aux six angles $AB\hat{}AD$, $BA\hat{}BC$, $ED\hat{}EC$, $CB\hat{}CD$, $DA\hat{}DC$, $FA\hat{}FD$ qui sont les supplémens des premiers, il n'y a qu'à changer le signe des cosinus; c'est-à-dire que si l'on nomme

m, n, p, les trois angles $AB\hat{}AD$, $BA\hat{}BC$, $ED\hat{}EC$;

s, q, r, les trois angles $CB\hat{}CD$, $DA\hat{}DC$, $FA\hat{}FD$,

respectivement opposés aux trois premiers, on aura la formule suivante qui satisfait à la question proposée,

$$\begin{aligned}
&1 - \cos^2 m - \cos^2 n - \cos^2 p - \cos^2 q - \cos^2 r - \cos^2 s \\
&+ \cos^2 m \,.\, \cos^2 s + \cos^2 n \,.\, \cos^2 q + \cos^2 p \,.\, \cos^2 r \\
&- 2 \cos m \,.\, \cos n \,.\, \cos p - 2 \cos m \,.\, \cos q \,.\, \cos r \\
&- 2 \cos n \,.\, \cos r \,.\, \cos s - 2 \cos p \,.\, \cos q \,.\, \cos s \\
&- 2 \cos m . \cos n . \cos q . \cos s - 2 \cos m . \cos p . \cos r . \cos s \\
&- 2 \cos m . \cos p . \cos q . \cos r = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A)
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait trouver.

COROLLAIRE.

53. Il est évident que la même formule s'applique aux six angles formés par les quatre faces de la pyramide quadrangulaire qui a son sommet au centre de la surface sphérique sur laquelle est tracé le quadrilatère BCDE, et dont les quatre arêtes coupent cette surface sphérique aux points B, C, D, E; car les six angles que forment entre elles deux à deux ces faces prolongées, ne sont autre chose évidemment que les angles mêmes du quadrilatère que nous venons de considérer.

PROBLÈME XXIV.

54. *De ces six choses, savoir, les trois angles que forment entre elles les arêtes qui se réunissent au sommet d'une pyramide triangulaire, et les trois autres angles que forment ces mêmes arêtes avec la base de cette pyramide, cinq quelconques étant données, trouver la sixième.*

Solution. Concevons du sommet de la pyramide une perpendiculaire sur la base, il est évident que les trois angles que formera cette perpendiculaire avec les arêtes au sommet, seront les complémens respectifs des angles formés par ces mêmes arêtes avec la base. Donc la formule trouvée (50) est applicable au cas présent, en substituant pour ces trois angles les sinus aux cosinus; c'est-à-dire, que si l'on désigne les trois arêtes par f, g, h, la base par L, le quart de la circonférence par ϖ; et qu'on fasse

$$g\hat{}h=m,\quad h\hat{}f=n,\quad f\hat{}g=p,\quad f\hat{}L=s,\quad g\hat{}L=q,\quad h\hat{}L=r,$$

les angles qu'il faudra substituer dans la formule (A) (50) à la place de m, n, p, s, q, r respectivement, seront

$$m,\ n,\ p,\ \varpi-s,\ \varpi-q,\ \varpi-r;$$

ou, ce qui revient au même, il faudra substituer dans cette formule, au lieu des quantités

$$\cos m,\ \cos n,\ \cos p,\ \cos s,\ \cos q,\ \cos r,$$

les quantités suivantes

$$\cos m,\ \cos n,\ \cos p,\ \cos(\varpi-s),\ \cos(\varpi-q),\ \cos(\varpi-r);$$

par cette substitution, on obtiendra la formule suivante, qui satisfait à la question proposée,

$$\begin{aligned}1 &- \cos^2 m - \cos^2 n - \cos^2 p - \sin^2 q - \sin^2 r - \sin^2 s\\ &+ \cos^2 m \,.\, \sin^2 s + \sin^2 n \,.\, \sin^2 q + \cos^2 p \,.\, \sin^2 r\\ &+ 2\cos m \,.\, \cos n \,.\, \cos p + 2\cos m \,.\, \sin q \,.\, \sin r\\ &+ 2\cos n \,.\, \sin r \,.\, \sin s + 2\cos p \,.\, \sin q \,.\, \sin s\\ &- 2\cos m \,.\, \cos n \,.\, \sin q \,.\, \sin s - 2\cos m \,.\, \cos p \,.\, \sin r \,.\, \sin s\\ &- 2\cos n \,.\, \cos p \,.\, \sin q \,.\, \sin r = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(A)}\end{aligned}$$

ce qu'il fallait trouver.

PROBLÈME XXV.

55. *De ces six choses, savoir, les trois angles formés au sommet d'une pyramide triangulaire, par les arêtes qui s'y réunissent, chacune avec la face qui lui est opposée, et les trois angles que forme avec ces mêmes faces une droite qui traverserait la pyramide suivant une direction quelconque ; de ces six choses, dis-je, cinq quelconques étant données, trouver la sixième.*

Solution. Par le sommet de la pyramide, j'imagine une droite parallèle à la transversale proposée. Cette droite fera par conséquent avec les faces de la pyramide, les mêmes angles que la transversale elle-même. Mais si de plus, par le même sommet, nous imaginons trois droites respectivement perpendiculaires à ces faces, il est évident que ces droites feront avec la parallèle ci-dessus, des angles qui seront complémens de ceux que cette parallèle fait avec les mêmes faces. Donc si l'on désigne les trois arêtes par f, g, h, les faces respectivement opposées à ces arêtes au sommet de la pyramide par F, G, H, la droite menée parallélement à la transversale par L, et enfin le quart de circonférence par ϖ; il arrivera que les angles formés par cette parallèle et les droites élevées perpendiculairement aux faces F, G, H, seront respectivement

$$\varpi - \mathrm{L}\hat{\ }\mathrm{F},\quad \varpi - \mathrm{L}\hat{\ }\mathrm{G},\quad \varpi - \mathrm{L}\hat{\ }\mathrm{H};$$

pareillement les angles formés par ces perpendiculaires aux faces, et les arêtes qui leur sont respectivement opposées, seront les complémens de ceux que ces mêmes arêtes et ces mêmes faces font entre elles.

Donc ces trois perpendiculaires et la parallèle à la transversale, sont quatre droites partant d'un même point, et formant entre elles deux à deux les six angles suivans, dont les trois derniers sont respectivement opposés aux trois premiers,

$$\varpi - f\hat{\ }\mathrm{F},\ \varpi - g\hat{\ }\mathrm{G},\ \varpi - h\hat{\ }\mathrm{H},\ \varpi - \mathrm{L}\hat{\ }\mathrm{F},\ \varpi - \mathrm{L}\hat{\ }\mathrm{G},\ \varpi - \mathrm{L}\hat{\ }\mathrm{H}.$$

Donc la formule trouvée (50) est applicable à ces six angles ; c'est-

à-dire, que si l'on suppose

$$f\hat{}F = m,\ g\hat{}G = n,\ h\hat{}H = p,\ L\hat{}F = s,\ L\hat{}G = q,\ L\hat{}H = r,$$

il n'y aura qu'à substituer dans la formule, au lieu des quantités m, n, p, s, q, r, le complément de chacune d'elles, ou, ce qui revient au même, le sinus de chacune d'elles à son cosinus. Cette substitution donnera la formule suivante qui satisfait à la question proposée,

$$\begin{aligned}
&1 - \sin^2 m - \sin^2 n - \sin^2 p - \sin^2 q - \sin^2 r - \sin^2 s \\
&+ \sin^2 m \,.\, \sin^2 s + \sin^2 n \,.\, \sin^2 q + \sin^2 p \,.\, \sin^2 r \\
&+ 2 \sin m \,.\, \sin n \,.\, \sin p + 2 \sin m \,.\, \sin q \,.\, \sin r \\
&+ 2 \sin n \,.\, \sin r \,.\, \sin s + 2 \sin p \,.\, \sin q \,.\, \sin s \\
&- 2 \sin m . \sin n . \sin q . \sin s - 2 \sin m . \sin p . \sin r . \sin s \\
&- 2 \sin n . \sin p . \sin q . \sin r = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A)
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait trouver.

Remarque.

56. Nous pourrions facilement pousser plus loin le nombre de ces questions, et nous livrer aux applications dont elles sont susceptibles; mais ce serait perdre de vue notre objet principal, qui est de rechercher la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace. C'est ce dont nous allons nous occuper dans le problème suivant. Mais je ne puis quitter ce qui regarde la pyramide triangulaire, sans souhaiter encore qu'on fasse par elle, pour la Géométrie aux trois dimensions, ce qu'on a fait pour la Géométrie plane, par la résolution du triangle dans tous les cas possibles. Nous avons bien donné ci-dessus (45) la solution du problème général; mais nous n'avons fait, à proprement parler, que mettre ce problème en équations, de même qu'on met le problème général de la Trigonométrie ordinaire en équations, en exprimant toutes les parties du triangle en valeurs de trois seulement d'entre elles, comme par exemple les trois côtés; mais il s'agit ensuite de développer ces équations primitives, pour les appliquer à chaque problème particulier, et leur donner la forme la plus avantageuse pour le calcul des nombres ordinaires et celui des logarithmes. De même ici, nous avons bien

exprimé toutes les parties de la pyramide triangulaire en valeurs de ses six arêtes seulement ; mais il y a un travail immense à faire, pour que de ces formules primitives on puisse passer immédiatement à la résolution soit algébrique, soit numérique de la pyramide dans tous les cas particuliers ; et c'est ce travail qui serait infiniment utile.

57. J'observerai, en terminant ce qui regarde cette matière, que dans presque toutes les formules trouvées se rencontrent certaines classes de quantités dont, pour abréger les calculs, on peut représenter la somme par une seule lettre. Considérons, par exemple, la formule (A) du problème IV (12), les six premiers termes du facteur qui multiplie $4R^2$, ne sont autre chose que la somme des produits de la 4e puissance de chacune des arêtes, par le carré de l'arête opposée : ainsi nous pouvons représenter cette somme par une seule lettre M, et employer l'une pour l'autre dans toutes les autres formules où elle peut se rencontrer.

De même, les quatre termes qui suivent, composent la somme des produits des carrés, des trois arêtes qui forment les côtés de chacun des quatre triangles, qui sont les bases de la pyramide ; ainsi nous pouvons, une fois pour toutes, prendre N pour représenter cette somme connue.

Les douze termes suivans composent la somme des produits des carrés des arêtes, multipliées trois par trois, en les prenant consécutivement, de manière qu'il y en ait deux d'opposées dans chacun des produits : ainsi nous pouvons représenter dans toutes les formules où elle entrera, cette quantité connue, par O.

Les trois termes qui suivent composent le double de la somme des produits des carrés des arêtes prises quatre à quatre, de manière que ces quatre arêtes soient opposées deux à deux. Ainsi nous pouvons représenter cette somme connue, par P.

Enfin, les trois derniers termes composent la somme des produits des quatrièmes puissances des arêtes opposées deux à deux ; ainsi nous pouvons exprimer cette somme connue, par Q.

Ces dénominations une fois adoptées, la formule en question pourra s'exprimer ainsi :

$$4R^2(M+N-O)+P-Q=0 \ldots\ldots\ldots (A)$$

De même, la formule (A) du problème II (6) pourra s'exprimer ainsi :

$$x^2(2m^2n^2+2m^2p^2+2n^2p^2-m^4-n^4-p^4)$$
$$+M+N-O=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B)$$

De même encore, la formule (A) du problème III (9) pourra s'exprimer ainsi :

$$9.16.S^2+M+N-O=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (C)$$

Il en sera de même de la plupart des autres formules trouvées jusqu'au n° 48, qui ne sont guères que des combinaisons de ces mêmes quantités M, N, O, P, Q. Par ce moyen on pourra faire des rapprochemens curieux entre ces diverses formules. Par exemple, en combinant la première des formules précédentes avec la troisième ; on aura cette relation entre les quatre quantités P, Q, R, S,

$$4.9.16.R^2.S^2=Q-P \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (D)$$

ainsi des autres.

Puisque nous avons

$$Q=m^4f^4+g^4n^4+h^4p^4$$
$$P=2n^2p^2g^2h^2+2m^2p^2f^2h^2+2m^2n^2f^2g^2.$$

Si dans ces dernières équations nous mettons pour f, g, h, m, n, p, leurs valeurs respectives trouvées (47), nous aurons

$$Q=16R^8\Big((1-\cos m')^2(1-\cos f')^2+(1-\cos g')^2(1-\cos n')^2$$
$$+(1-\cos h')(1-\cos p')^2\Big)$$
$$P=2.16\Big((1-\cos n')(1-\cos p')(1-\cos g')(1-\cos h')$$
$$+(1-\cos m')(1-\cos p')(1-\cos f')(1-\cos h')$$
$$+(1-\cos m')(1-\cos n')(1-\cos f')(1-\cos g')\Big).$$

Substituant ces valeurs de Q et de P dans la formule précédente (D), et divisant tout par $16R^2$; nous aurons la formule suivante, qui donne la solidité de la pyramide en valeur du rayon de la sphère

circonscrite, et des six angles formés au centre, par les rayons menés de ce centre à chacun des sommets de la pyramide.

$$S=\tfrac{1}{6}R^3\sqrt{\Big((1-\cos m')^2(1-\cos f')^2+(1-\cos g')^2(1-\cos n')^2}$$
$$+\ (1-\cos h')^2(1-\cos p')^2$$
$$-2.(1-\cos n')\,(1-\cos p')\,(1-\cos g')\,(1-\cos h')$$
$$-2.(1-\cos m')\,(1-\cos p')\,(1-\cos f')\,(1-\cos h')$$
$$-2.(1-\cos m')\,(1-\cos n')\,(1-\cos f')\,(1-\cos g')\Big)\ldots(\mathrm{E}).$$

PROBLÈME XXVI.

58. *Des dix droites qui joignent deux à deux cinq points quelconques pris dans l'espace, neuf quelconques étant données, trouver la dixième.*

FIG. 8. *Solution.* Soient A, B, C, D, E, les cinq points proposés, et les ayant joints deux à deux par des droites, désignons, pour abréger, ces dix droites comme il suit :

$$\overline{AD}=f,\ \overline{AB}=g,\ \overline{AC}=h,\ \overline{AE}=l,\ \overline{BC}=m,\ \overline{CD}=n,\ \overline{BD}=p,$$
$$\overline{BE}=q,\ \overline{CE}=r,\ \overline{DE}=s.$$

Je prends maintenant l'un quelconque des cinq points proposés, A, par exemple, pour centre d'une surface sphérique d'un rayon quelconque, et je prolonge les quatre droites ou arêtes qui partent du point A, jusqu'à la rencontre de cette surface sphérique, en B', C', D', E'; enfin je joins les quatre points B', C', D', E', deux à deux, par six grands arcs de cercle, que je désigne comme il suit :

$$\overline{B'C'}=m',\ \overline{C'D'}=n',\ \overline{B'D'}=p',\ \overline{D'E'}=s',\ \overline{B'E'}=q',\ \overline{C'E'}=r' :$$

Cela posé, nous avons (48) entre les six arcs m', n', p', s', q', r',

l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
&1 - \cos^2 m' - \cos^2 n' - \cos^2 p' - \cos^2 q' - \cos^2 r' - \cos^2 s' \\
&+ \cos^2 m' \,.\, \cos^2 s' + \cos^2 n' \,.\, \cos^2 q' + \cos^2 p' \,.\, \cos^2 r' \\
&+ 2\cos m' \,.\, \cos n' \,.\, \cos p' + 2\cos m' \,.\, \cos q' \,.\, \cos r' \\
&+ 2\cos n' \,.\, \cos r' \,.\, \cos s' + 2\cos p' \,.\, \cos q' \,.\, \cos s' \\
&- 2\cos m' .\cos n' .\cos q' .\cos s' - 2\cos m' .\cos p' .\cos r' .\cos s' \\
&- 2\cos n' .\cos p' .\cos q' .\cos r' = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A)
\end{aligned}$$

Mais puisque les arcs m', n', etc. sont les mesures des angles BAC, CAD, etc. nous aurons par le lemme I les six équations suivantes :

$$\cos m' = \frac{g^2 + h^2 - m^2}{2gh}, \quad \cos n' = \frac{f^2 + h^2 - n^2}{2fh}, \quad \cos p' = \frac{g^2 + f^2 - p^2}{2gf},$$

$$\cos s' = \frac{f^2 + l^2 - s^2}{2fl}, \quad \cos q' = \frac{g^2 + l^2 - q^2}{2gl}, \quad \cos r' = \frac{h^2 + l^2 - r^2}{2hl},$$

Substituant toutes ces valeurs dans l'équation précédente (A), réduisant tout au même dénominateur $16f^2g^2h^2l^2$, et effaçant les termes qui se détruisent; on obtiendra, après un calcul fort long, mais qui n'a point de difficultés, la formule symétrique suivante entre les dix quantités ou arêtes $f, g, h, l, m, n, p, q, r, s$, et qui résout le problème proposé.

$$
\begin{aligned}
& g^4n^4 + g^4s^4 + g^4r^4 + h^4s^4 + h^4q^4 \\
& + h^4p^4 + f^4m^4 + f^4q^4 + f^4r^4 + l^4m^4 \\
& + l^4n^4 + l^4p^4 + m^4s^4 + n^4q^4 + r^4p^4 \\
& - 2g^4n^2s^2 - 2g^4n^2r^2 - 2g^4r^2s^2 - 2h^4q^2s^2 - 2h^4p^2s^2 \\
& - 2h^4p^2q^2 - 2f^4m^2q^2 - 2f^4m^2r^2 - 2f^4q^2r^2 - 2l^4m^2n^2 \\
& - 2l^4m^2p^2 - 2l^4n^2p^2 - 2m^4f^2l^2 - 2m^4f^2s^2 - 2m^4l^2s^2 \\
& - 2n^4g^2l^2 - 2n^4g^2q^2 - 2n^4l^2q^2 - 2s^4g^2h^2 - 2s^4g^2m^2 \\
& - 2s^4h^2m^2 - 2q^4f^2h^2 - 2q^4h^2n^2 - 2q^4f^2n^2 - 2r^4f^2g^2 \\
& - 2r^4g^2p^2 - 2r^4f^2p^2 - 2p^4h^2l^2 - 2p^4h^2r^2 - 2p^4l^2r^2 \\
& - 4g^2h^2m^2s^2 - 4f^2g^2p^2r^2 - 4g^2l^2n^2q^2 - 4g^2n^2r^2s^2 - 4f^2h^2n^2q^2 \\
& - 4h^2l^2p^2r^2 - 4h^2p^2q^2s^2 - 4f^2l^2m^2s^2 - 4f^2m^2q^2r^2 - 4l^2m^2n^2p^2 \\
& - 2g^2h^2n^2p^2 - 2g^2h^2q^2r^2 - 2f^2g^2m^2n^2 - 2f^2g^2q^2s^2 - 2g^2l^2m^2r^2 \\
& - 2g^2l^2p^2s^2 - 2f^2h^2m^2p^2 - 2f^2h^2r^2s^2 - 2h^2l^2m^2q^2 - 2h^2l^2n^2s^2 \\
& - 2f^2l^2n^2r^2 - 2f^2l^2p^2q^2 - 2m^2n^2q^2s^2 - 2m^2p^2r^2s^2 - 2n^2p^2q^2r^2 \\
& + 2g^2h^2n^2s^2 + 2g^2h^2n^2q^2 + 2g^2h^2q^2s^2 + 2g^2h^2r^2s^2 + 2g^2h^2p^2s^2 \\
& + 2g^2h^2p^2r^2 + 2f^2g^2m^2s^2 + 2f^2g^2m^2r^2 + 2f^2g^2n^2q^2 + 2f^2g^2n^2r^2 \\
& + 2f^2g^2r^2s^2 + 2f^2g^2q^2r^2 + 2g^2l^2m^2n^2 + 2g^2l^2m^2s^2 + 2g^2l^2n^2s^2 \\
& + 2g^2l^2n^2r^2 + 2g^2l^2n^2p^2 + 2g^2l^2p^2r^2 + 2g^2m^2n^2s^2 + 2g^2m^2r^2s^2 \\
& + 2g^2n^2q^2s^2 + 2g^2n^2q^2r^2 + 2g^2n^2p^2r^2 + 2g^2p^2r^2s^2 + 2f^2h^2m^2s^2 \\
& + 2f^2h^2m^2q^2 + 2f^2h^2q^2s^2 + 2f^2h^2q^2r^2 + 2f^2h^2p^2q^2 + 2f^2h^2p^2r^2 \\
& + 2h^2l^2m^2s^2 + 2h^2l^2m^2p^2 + 2h^2l^2n^2q^2 + 2h^2l^2n^2p^2 + 2h^2l^2p^2s^2 \\
& + 2h^2l^2p^2q^2 + 2h^2m^2q^2s^2 + 2h^2m^2p^2s^2 + 2h^2n^2q^2s^2 + 2h^2n^2p^2q^2 \\
& + 2h^2p^2r^2s^2 + 2h^2p^2q^2r^2 + 2f^2l^2m^2n^2 + 2f^2l^2m^2q^2 + 2f^2l^2m^2r^2 \\
& + 2f^2l^2m^2p^2 + 2f^2l^2n^2q^2 + 2f^2l^2p^2r^2 + 2f^2m^2n^2q^2 + 2f^2m^2q^2s^2 \\
& + 2f^2m^2r^2s^2 + 2f^2m^2p^2r^2 + 2f^2n^2q^2r^2 + 2f^2p^2q^2r^2 + 2l^2m^2n^2s^2 \\
& + 2l^2m^2n^2q^2 + 2l^2m^2p^2s^2 + 2l^2m^2p^2r^2 + 2l^2n^2p^2q^2 + 2l^2n^2p^2r^2 = 0 \ldots \text{(A)}
\end{aligned}
$$

ce qu'il fallait trouver.

Remarque.

59. Quoique cette formule qui a 130 termes, paroisse d'abord fort compliquée, elle est symétrique et assujétie à une loi facile à saisir. Car, 1°. les quinze premiers termes composent la somme des produits des quatrièmes puissances des arêtes opposées deux à deux; c'est-à-dire, de celles qui n'ont pas d'extrémités communes. Soit cette somme........................... $=$ F.

2°. Les trente termes qui suivent composant deux fois la somme des produits de la quatrième puissance de chacune des arêtes, par le produit des carrés des arêtes qui lui sont opposées, prises deux à deux. Soit cette somme.......................... $=$ G.

3°. Les dix termes suivans composant quatre fois la somme des produits du carré de chacune des arêtes, par le produit du carré de chacune des trois arêtes opposées, c'est-à-dire qui n'ont point d'extrémité commune avec elle. Soit cette somme..... $=$ H.

4°. Les quinze termes suivans composent deux fois la somme des produits des carrés des quatre côtés de chacun des quadrilatères gauches qui entrent dans la construction de la pyramide. Soit cette somme.. $=$ K.

5°. Enfin les soixante derniers termes composent deux fois la somme des produits des carrés des quatre arêtes qui formeraient le contour d'un pentagone gauche, dont on aurait retranché un côté. Par exemple, ABCDEA exprime le contour d'un pentagone gauche dont les côtés successifs sont $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EA}$; qu'on ôte l'un quelconque de ces côtés, par exemple $\overline{CD}$, il restera les quatre côtés $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DE}$, $\overline{AE}$, ou g, m, s, l : or le double du produit des carrés de ces quatre quantités est $2g^2l^2m^2s^2$, qui se trouve être le $14^{\text{ème}}$ terme des soixante de cette dernière classe. Soit cette somme $=$ L, la formule (A) pourra donc s'exprimer simplement comme il suit :

$$F - 2G + 4H - 2K + 2L = 0 \ldots\ldots\ldots \text{(B)}.$$

Cette formule extrêmement remarquable, et qui fait particulièrement l'objet de ce Mémoire, donne la solution d'une mul-

titude de questions difficiles. Par exemple, celles-ci : quatre points étant donnés dans l'espace, trouver un cinquième point dont les distances aux quatre premiers soient en raisons données, ou qui aient entre elles telle autre relation donnée ; et cette autre, quatre sphères étant données dans l'espace, en trouver une cinquième qui soit tangente aux quatre autres, ou qui en retranche des arcs donnés, etc.

COROLLAIRE I.

60. Si des cinq points considérés dans l'espace, on suppose que quatre soient les sommets d'une pyramide triangulaire, et que le cinquième soit le centre de la sphère circonscrite, on trouvera par la formule précédente le rayon de cette sphère. Car supposons, par exemple, que E soit le centre, et que les quatre autres points A, B, C, D, soient les sommets de la pyramide circonscrite ; les droites $\overline{EA}$, $\overline{EB}$, $\overline{EC}$, $\overline{ED}$, seront donc égales entre elles et au rayon cherché. Ainsi, désignant ce rayon par R, il n'y aura qu'à substituer dans la formule précédente, R à la place de chacune des quantités l, q, r, s ; et l'équation qui en résultera, donnera R en valeurs des six arêtes, f, g, h, m, n, p, de la pyramide. Cette opération donnera la formule suivante, qui s'accorde avec celle que nous avions déjà trouvée par le problème IV (12),

$$\begin{aligned}4R^2(&f^4m^2+m^4f^2+g^4n^2+n^4g^2+h^4p^2+p^4h^2\\&+m^2g^2h^2+p^2f^2g^2+n^2f^2h^2+m^2n^2p^2\\&-m^2n^2g^2-n^2p^2g^2-n^2f^2g^2-m^2f^2g^2\\&-n^2g^2h^2-p^2g^2h^2-m^2n^2f^2-m^2p^2f^2\\&-n^2p^2h^2-m^2p^2h^2-m^2f^2h^2-p^2f^2h^2)\\&+2n^2p^2g^2h^2+2m^2p^2f^2h^2+2m^2n^2f^2g^2\\&-m^4f^4-g^4n^4-h^4p^4=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A)\end{aligned}$$

COROLLAIRE II.

61. On peut, par le corollaire précédent, trouver la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris sur une même surface sphérique. Car supposons que les cinq

points A, B, C, D, E, soient tous dans une même surface sphérique dont le rayon soit R. L'équation (A) trouvée dans le problème précédent, donnera la valeur de R en m, n, p, f, g, h; mais puisque par hypothèse, E est aussi sur la surface sphérique, une pareille équation doit exister en substituant aux arêtes f, g, h, les arêtes s, q, r respectivement. Egalant donc les deux valeurs de R^2 tirées de chacune de ces équations, on aura la relation qui doit exister entre les 9 arêtes m, n, p, f, g, h, s, q, r, pour que les cinq points proposés se trouvent tous sur une même surface sphérique; et par la même raison, une semblable relation existe entre les distances m, n, p, f, g, h, s, q, r, l, prises neuf à neuf, de toutes les manières possibles, ce qui fait en tout 10 relations de même nature que la précédente.

PROBLEME XXVII.

62. *Connaissant les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace, trouver l'angle d'inclinaison de la droite qui passe par deux quelconques de ces points, sur le plan qui contient les trois autres.*

Solution. Supposons que les cinq points donnés soient A, B, C, D, E, et qu'il s'agisse de trouver l'angle d'inclinaison FIG. 10.
de la droite qui passe par A et B sur le plan qui contient les trois autres, C, D, E. De chacun des points A, B, j'abaisse une perpendiculaire sur le plan CDE, et par ces deux perpendiculaires j'imagine un plan. Ce plan sera donc perpendiculaire au plan CDE, et contiendra la droite qui doit passer par A et B. Soient donc $\overline{Aa}$, $\overline{Bb}$, les perpendiculaires abaissées des points A, B, sur le plan CDE; menons par a et b une droite indéfinie qui représentera évidemment le plan CDE, et prolongeons $\overline{AB}$ jusqu'à la rencontre de cette droite au point K; il est clair que l'angle AKa est précisément l'angle cherché. Cela posé, du point B je mène $\overline{Ba'}$ perpendiculaire à $\overline{Aa}$: l'angle ABa' est le même que l'angle AKa; donc nous aurons

$$\sin AKa = \frac{Aa'}{AB}, \text{ ou } \sin AKa = \frac{\overline{Aa} - \overline{Bb}}{\overline{AB}}.$$

Mais en considérant A comme le sommet d'une pyramide qui a pour base CDE, il est facile d'en trouver la hauteur $\overline{Aa}$ par la formule trouvée (6) ; et pareillement, en considérant B comme le sommet d'une pyramide qui a aussi pour base CDE, on aura par la même formule la hauteur $\overline{Bb}$.

De plus, les distances respectives des cinq points A, B, C, D, E, étant toutes données par hypothèse, la droite $\overline{AB}$ est connue. Donc dans l'équation trouvée ci-dessus,

$$\sin AKa = \frac{\overline{Aa} - \overline{Bb}}{\overline{AB}},$$

toutes les quantités qui entrent dans le second membre sont connues; donc le premier membre sin AK*a* est aussi connu. *Ce qu'il fallait trouver.*

Si des dix droites qui joignent deux à deux les cinq points A, B, C, D, E, on n'en connaissait que neuf, il faudrait commencer par chercher la dixième (58), et la question se réduirait ensuite à celle qu'on vient de résoudre.

PROBLEME XXVIII.

63. *Connaissant les distances respectives de six points quelconques pris dans l'espace, trouver l'angle que forment entre eux les deux plans qui contiennent, le premier trois quelconques des six points proposés, le second les trois autres.*

FIG 11. *Solution.* Soient A, B, C, M, N, P, les six points proposés, et qu'il s'agisse de trouver l'angle compris entre le plan qui contient les trois premiers A, B, C, et celui qui contient les trois autres M, N, P.

Imaginons de chacun des points A, B, C, contenus dans le premier plan, une perpendiculaire abaissée sur le second. Puisque les distances respectives de tous les points proposés sont données par hypothèse, ces perpendiculaires seront faciles à trouver ; car si l'on conçoit du point A, par exemple, les droites $\overline{AM}$, $\overline{AN}$,

$\overline{AP}$, il en résultera une pyramide triangulaire, dont les six arêtes seront données, et dont la hauteur, à partir du point A, est précisément la perpendiculaire qu'il s'agit de trouver.

Maintenant, imaginons $\overline{AB}$ prolongée jusqu'à la rencontre de deux plans ABC, MNP, et par les pieds des perpendiculaires abaissées des points A et B sur le plan MNP, concevons aussi une droite : elle ira rencontrer $\overline{AB}$ dans l'intersection des plans ABC, MNP, et ces droites formeront avec les perpendiculaires ci-dessus, des triangles rectangles semblables, dans lesquels on connaît, 1°. les deux perpendiculaires, 2°. la distance $\overline{AB}$ de leur sommet. On trouvera donc facilement les autres côtés de ces triangles par cette proportion : la différence de ces deux perpendiculaires est à $\overline{AB}$ comme la perpendiculaire abaissée du point B est à la distance du point B, au point où $\overline{AB}$ rencontre le plan MNP.

Par une opération semblable, on trouvera la distance du même point B, au point où la droite $\overline{AC}$ rencontrera ce même plan MNP : ainsi ces deux droites $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, prolongées jusqu'à l'intersection des plans ABC, MNP, et cette intersection elle-même, formeront un triangle rectiligne dans lequel on connaîtra les deux côtés pris sur les directions de $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ avec l'angle compris au sommet B de ce triangle. On aura donc par le lemme 1, la perpendiculaire abaissée de ce point B qui est son sommet sur sa base qui est l'intersection de deux plans; et comme la perpendiculaire abaissée du point B sur le plan MNP est aussi connue, on aura, en joignant les pieds de ces deux perpendiculaires, un triangle rectangle, dont on connaîtra l'hypoténuse et un petit côté; et par conséquent on trouvera sans difficulté l'angle opposé à ce petit côté, et cet angle est précisément l'angle compris entre les deux plans ABC, MNP; *ce qu'il fallait trouver.*

PROBLÈME XXIX.

64. *Un système quelconque de points étant proposé dans l'espace, et connaissant les distances de chacun d'eux à trois autres points fixes pris à volonté, pour servir de termes de comparaison; trouver les droites qui joignent tous les points du système deux à deux, les angles que forment ces droites entre elles, ceux que forment ces mêmes droites avec les plans qui contiennent ces points trois à trois, les angles formés par ces plans entre eux, la perpendiculaire abaissée de chacun des points du système sur la droite qui en joint deux autres quelconques, ou sur le plan qui en contient trois, la plus courte distance de deux quelconques de ces mêmes droites*, etc.

Solution. Considérons d'abord la distance de deux quelconques d'entre les points du système proposé. Puisqu'on connaît les distances de chacun de ces points, aux trois points fixes qui ont été choisis dans l'espace pour servir de termes de comparaison, et dont les distances sont données, il y aura neuf données parmi les dix droites qui joignent ces cinq points deux à deux; donc (58) on aura la dixième, c'est-à-dire la distance cherchée des deux points proposés. En appliquant la même solution à tous les points du système pris deux à deux, on aura donc déjà toutes les distances cherchées entre ces mêmes points. Maintenant, pour trouver les angles formés par ces droites, il n'y a qu'à considérer les points trois à trois; car les droites qui les joignent formeront un triangle, dont les côtés seront connus par ce qui vient d'être dit; donc on aura chacun des angles par le lemme I. Voilà pour les droites qui ont une extrémité commune : quant à celles qui ne se rencontrent pas, il faut joindre leurs extrémités deux à deux, en les considérant comme les quatre sommets d'une pyramide triangulaire dont ces droites sont deux arêtes opposées, et alors on aura l'angle qu'elles forment (27). Puis (41) on trouvera la plus courte distance de ces mêmes droites.

Pour trouver la perpendiculaire abaissée de l'un quelconque des points du système sur la droite qui joint deux des autres, il

suffit d'appliquer la formule 3 du lemme I au triangle qui a son sommet au point d'où doit partir la perpendiculaire, et dont la base est la droite comprise entre les deux autres; les trois points de ce triangle étant connus par ce qui a été dit ci-dessus.

Pour avoir la perpendiculaire abaissée de l'un quelconque des points du système sur le plan qui en contient trois autres, il faut considérer ces quatre points comme les quatre sommets d'une pyramide triangulaire, dont les six arêtes sont connues par ce qui a été dit ci-dessus, et alors la perpendiculaire cherchée n'est autre chose que la hauteur de cette même pyramide considérée comme ayant son sommet au point proposé.

Enfin on trouve (31 et suiv.) les angles que forment les droites avec les plans, et ceux que forment les plans entre eux: ainsi le problème proposé est entièrement résolu; *ce qu'il fallait trouver.*

PROBLEME XXX.

65. *Un système quelconque de points étant proposé dans l'espace, connaissant la distance de chacun d'eux à un autre point quelconque pris pour terme de comparaison, distance que je nomme rayon vecteur, et connaissant de plus les angles que fait ce rayon vecteur avec deux axes quelconques fixes partant de ce point central qui a été pris pour terme de comparaison, trouver les droites qui joignent tous les points du système proposé deux à deux, les angles que forment ces droites entre elles, etc. comme dans le problème précédent.*

Solution. Comparons deux à deux tous ces rayons vecteurs avec les deux axes fixes, cela fera quatre droites partant du même point, et ces quatre droites formeront six angles parmi lesquels il y en a cinq de connus par hypothèse; le seul qui ne l'est pas, étant celui qui est compris entre les deux rayons vecteurs. Or cet angle se trouve par le problème XXI (50); on aura donc ainsi tous les rayons vecteurs donnés par hypothèse, et tous les angles formés par ces rayons vecteurs deux à deux; donc, par le lemme I, on aura les distances de tous les points du système deux à deux, et le reste s'achevera comme dans le problème précédent. *Ce qu'il fallait trouver.*

PROBLEME XXXI.

66. *Une pyramide triangulaire étant rapportée à trois plans quelconques perpendiculaires entre eux, exprimer toutes les parties, tant linéaires qu'angulaires de cette pyramide, en valeurs des douze coordonnées qui répondent à ses quatre sommets.*

Solution. Je conserve les dénominations des problèmes II et suivans, et de plus je nomme

a, a', a'', les coordonnées du point A, à l'égard des trois plans rectangulaires;
b, b', b'', les trois coordonnées du point B,
c, c', c'', les trois coordonnées du point C,
d, d', d'', les trois coordonnées du point D.

Cela posé, il est clair que le carré d'une droite quelconque menée dans l'espace, étant toujours égal à la somme des carrés de ses projections sur trois axes quelconques rectangulaires, nous aurons

$$m^2 = (b-c)^2 + (b'-c')^2 + (b''-c'')^2$$
$$n^2 = (c-d)^2 + (c'-d')^2 + (c''-d'')^2$$
$$p^2 = (d-b)^2 + (d'-b')^2 + (d''-b'')^2$$
$$f^2 = (d-a)^2 + (d'-a')^2 + (d''-a'')^2$$
$$g^2 = (a-b)^2 + (a'-b')^2 + (a''-b'')^2$$
$$h^2 = (c-a)^2 + (c'-a')^2 + (c''-a'')^2.$$

Substituant donc toutes ces valeurs de m^2, n^2, p^2, f^2, g^2, h^2 dans les formules trouvées qui expriment toutes les parties de la pyramide en valeurs de ses seules arêtes, on aura l'expression de ces mêmes quantités en valeurs des coordonnées des quatre sommets A, B, C, D. *Ce qu'il fallait trouver.*

Remarque.

67. Ce qu'on vient de dire de la pyramide, s'applique à un polyèdre quelconque, c'est-à-dire, qu'on peut résoudre de la même manière cette question plus générale.

Un polyèdre quelconque étant rapporté à trois plans quelconques perpendiculaires entre eux, exprimer toutes ses parties, tant linéaires qu'angulaires en valeurs des coordonnées, qui répondent aux sommets de tous ses angles solides.

En effet, il est clair qu'on trouvera d'abord les carrés des distances respectives de tous ses sommets, deux à deux, en ajoutant les trois carrés des différences de leurs coordonnées correspondantes; puisque ces différences ne sont autre chose que les projections de la distance cherchée sur les trois axes, et que le carré d'une droite quelconque est évidemment égal à la somme des carrés de ses projections sur trois axes quelconques perpendiculaires entre eux.

On aura donc ainsi les distances respectives de tous les points du système proposé, exprimées en valeurs des coordonnées de ces mêmes points. Après quoi, pour avoir tout le reste, on achèvera comme dans le problème XXIX (64).

Par là on établit la liaison qui existe entre la méthode des triangles et celle des projections ou coordonnées. Chacune de ces méthodes a des avantages qui lui sont propres : en suivant la première, on exprime directement toutes les parties du système proposé en valeurs de quelques-unes seulement d'entre elles, suffisantes pour que tout le reste soit déterminé, ce qui donne le moyen de changer à volonté les données, en les prenant toujours parmi les élémens mêmes de la figure proposée.

Dans la méthode des projections au contraire, on commence par exprimer toutes les quantités du système en valeurs des coordonnées, ce qui s'opère par des méthodes générales très-ingénieuses; mais ensuite il faut éliminer toutes ces coordonnées qui ne sont, à proprement parler, que des quantités auxiliaires, pour y substituer les élémens mêmes de la figure. On ne peut donc, dans ce cas, regarder le problème comme résolu, que lorsque l'élimination de ces coordonnées est opérée, et c'est dans cette élimination principalement que consiste la difficulté de cette méthode, parcequ'il se trouve plus d'inconnues à éliminer, qu'il n'y a d'équations fournies; desorte qu'il faut des artifices particuliers d'analyse pour faire disparaître les inconnues, et trouver la relation qui existe

entre les seuls élémens propres de la figure proposée, au moyen des conditions arbitraires qui doivent suppléer aux conditions prescrites.

Par exemple, dans le cas de la pyramide, il faut seulement six données, que nous avons supposées être les six arêtes, et partant de là, nous sommes parvenus à trouver toutes les autres quantités du système en valeurs de ces six arêtes.

Suivant la méthode des projections, au contraire, on considère d'abord comme connues les douze coordonnées des quatre sommets; mais comme il faut les éliminer toutes, et qu'on n'a pourtant que six données, qui sont les six arêtes, on supplée aux six autres données qui manquent, par six conditions arbitraires, fondées sur ce que les plans rectangulaires auxquels on rapporte le système, étant pris à volonté, on est maître de fixer où l'on veut l'origine des trois axes et leurs trois directions. Ainsi, il faut exprimer ces six conditions arbitraires par six nouvelles équations qui, combinées avec les six arêtes, donneront le moyen d'éliminer les douze coordonnées. C'est dans l'art de conduire, de la manière la plus simple, ce calcul suivant les circonstances, que consistent les ressources de la méthode féconde des projections. On voit qu'elle est fondée essentiellement sur l'art de changer le système des coordonnées, afin de pouvoir choisir l'origine et les directions des axes le plus favorablement possible à l'objet qu'on a en vue. C'est pour cette raison que je me suis occupé ici du problème important de la transformation des axes pris dans sa plus grande généralité, sans cependant déplacer l'origine des coordonnées, parcequ'on sait que pour transporter cette origine où l'on veut, il n'y a autre chose à faire, que d'ajouter une constante arbitraire à chacune d'elles.

PROBLÈME XXXII.

68. *La position d'un point étant déterminée dans l'espace par trois coordonnées quelconques, faisant entre elles des angles donnés, on propose de changer les directions de ces coordonnées, supposant que l'on connaisse l'angle que fait chacune des nouvelles coordonnées avec chacune des anciennes.*

Solution. Soit M le point proposé dont la position soit déterminée dans l'espace par les trois coordonnées FIG. 12.

$$\overline{AP}=x,\quad \overline{AQ}=y,\quad \overline{AR}=z$$

qu'on suppose données, et faisant entre elles les angles aussi donnés,

$$PAQ=x\hat{\ }y,\quad PAR=x\hat{\ }z,\quad QAR=y\hat{\ }z \ldots(A).$$

Maintenant, l'origine A des coordonnées restant la même, soient les trois nouvelles coordonnées du même point M

$$\overline{Ap}=x',\quad \overline{Aq}=y',\quad \overline{Ar}=z' \ldots\ldots\ldots(B)$$

formant chacune avec les premières, les angles donnés,

$$pAP=x\hat{\ }x',\quad pAQ=y\hat{\ }x',\quad pAR=z\hat{\ }x' \ldots(C)$$
$$qAP=x\hat{\ }y',\quad qAQ=y\hat{\ }y',\quad qAR=z\hat{\ }y' \ldots(D)$$
$$rAP=x\hat{\ }z',\quad rAQ=y\hat{\ }z',\quad rAR=z\hat{\ }z' \ldots(E)$$

Il s'agit donc de trouver les premières coordonnées x, y, z, en valeurs des nouvelles x', y', z', et des douze angles que nous venons d'énumérer.

J'observe d'abord, que des trois angles marqués (C), il suffit d'en connaître deux quelconques pour que le troisième soit déterminé. Ainsi, lorsqu'il est dit dans l'énoncé du problème, que ces trois angles sont donnés, on entend seulement, que deux d'entre eux ayant été donnés immédiatement, le troisième a été déterminé en valeurs des donnés, par ce qu'on nomme une *équation de condition.* Cette équation de condition est facile à trouver, car les quatre droites x, y, z, x' forment entre elles six angles

$$x\hat{\ }y,\quad x\hat{\ }z,\quad y\hat{\ }z,\quad x\hat{\ }x',\quad y\hat{\ }x',\quad z\hat{\ }x',$$

dont les trois premiers et deux d'entre les derniers sont donnés par hypothèse. Donc on peut leur appliquer la formule trouvée (50), en faisant

$$x\hat{\ }y=m,\ x\hat{\ }z=n,\ y\hat{\ }z=p,\ x\hat{\ }x'=r,\ y\hat{\ }x'=q,\ z\hat{\ }x'=s \ldots(F)$$

Il en est de même des trois angles marqués (D), il suffit que deux

soient connus, pour que le troisième soit déterminé par la même formule, en faisant

$$\widehat{x\,y}=m,\ \widehat{x\,z}=n,\ \widehat{y\,z}=p,\ \widehat{x\,y'}=r,\ \widehat{y\,y'}=q,\ \widehat{z\,y'}=s \ldots \text{(G)}$$

Enfin, il en est de même encore des trois angles marqués (E), auxquels on appliquera la même formule en faisant

$$\widehat{x\,y}=m,\ \widehat{x\,z}=n,\ \widehat{y\,z}=p,\ \widehat{x\,z'}=r,\ \widehat{y\,z'}=q,\ \widehat{z\,z'}=s;$$

on a donc d'abord, pour déterminer réellement tous les angles supposés donnés dans l'énoncé du problème, mais qui ne le sont qu'implicitement, les trois équations de condition suivantes :

$$\begin{aligned}
&1-\cos^2\widehat{x\,y}-\cos^2\widehat{x\,z}-\cos^2\widehat{y\,z}-\cos^2\widehat{x\,x'}-\cos^2\widehat{y\,x'}-\cos^2\widehat{z\,x'}\\
&+\cos^2\widehat{x\,y}\,.\cos^2\widehat{z\,x'}+\cos^2\widehat{x\,z}\,.\cos^2\widehat{y\,x'}+\cos^2\widehat{y\,z}\,.\cos^2\widehat{x\,x'}\\
&+2\cos\widehat{x\,y}\,.\cos\widehat{x\,z}\,.\cos\widehat{y\,z}+2\cos\widehat{x\,y}\,.\cos\widehat{y\,x'}\,.\cos\widehat{x\,x'}\\
&+2\cos\widehat{x\,z}\,.\cos\widehat{x\,x'}\,.\cos\widehat{z\,x'}+2\cos\widehat{y\,z}\,.\cos\widehat{y\,x'}\,.\cos\widehat{z\,x'}\\
&-2\cos\widehat{x\,y}\,.\cos\widehat{x\,z}\,.\cos\widehat{y\,x'}\,.\cos\widehat{z\,x'}-2\cos\widehat{x\,y}\,.\cos\widehat{y\,z}\,.\cos\widehat{x\,x'}\,.\cos\widehat{z\,x'}\\
&-2\cos\widehat{x\,z}\,.\cos\widehat{y\,z}\,.\cos\widehat{y\,y'}\,.\cos\widehat{x\,y'}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(K)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&1-\cos^2\widehat{x\,y}-\cos^2\widehat{x\,z}-\cos^2\widehat{y\,z}-\cos^2\widehat{x\,y'}-\cos^2\widehat{y\,y'}-\cos^2\widehat{z\,y'}\\
&+\cos^2\widehat{x\,y}\,.\cos^2\widehat{z\,y'}+\cos^2\widehat{x\,z}\,.\cos^2\widehat{y\,y'}+\cos^2\widehat{y\,z}\,.\cos^2\widehat{x\,y'}\\
&+2\cos\widehat{x\,y}\,.\cos\widehat{x\,z}\,.\cos\widehat{y\,z}+2\cos\widehat{x\,y}\,.\cos\widehat{x\,y'}\,.\cos\widehat{y\,y'}\\
&+2\cos\widehat{x\,z}\,.\cos\widehat{x\,y'}\,.\cos\widehat{z\,y'}+2\cos\widehat{y\,z}\,.\cos\widehat{y\,y'}\,.\cos\widehat{z\,y'}\\
&-2\cos\widehat{x\,y}\,.\cos\widehat{x\,z}\,.\cos\widehat{y\,y'}\,.\cos\widehat{z\,y'}-2\cos\widehat{x\,y}\,.\cos\widehat{y\,z}\,.\cos\widehat{x\,y'}\,.\cos\widehat{z\,y'}\\
&-2\cos\widehat{x\,z}\,.\cos\widehat{y\,z}\,.\cos\widehat{x\,y'}\,.\cos\widehat{y\,y'}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(L)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&1-\cos^2\widehat{x\,y'}-\cos^2\widehat{x\,z}-\cos^2\widehat{y\,z}-\cos^2\widehat{x\,z'}-\cos^2\widehat{y\,z'}-\cos^2\widehat{z\,z'}\\
&+\cos^2\widehat{x\,y}\,.\cos^2\widehat{z\,z'}+\cos^2\widehat{x\,z}\,.\cos^2\widehat{y\,z'}+\cos^2\widehat{y\,z}\,.\cos^2\widehat{x\,z'}\\
&+2\cos\widehat{x\,y}\,.\cos\widehat{x\,z}\,.\cos\widehat{y\,z}+2\cos\widehat{x\,y}\,.\cos\widehat{x\,z'}\,.\cos\widehat{y\,z'}\\
&+2\cos\widehat{x\,z}\,.\cos\widehat{x\,z'}\,.\cos\widehat{z\,z'}+2\cos\widehat{y\,z}\,.\cos\widehat{y\,z'}\,.\cos\widehat{z\,z'}\\
&-2\cos\widehat{x\,y}\,.\cos\widehat{x\,z}\,.\cos\widehat{y\,z'}\,.\cos\widehat{z\,z'}-2\cos\widehat{x\,y}\,.\cos\widehat{y\,z}\,.\cos\widehat{x\,z'}\,.\cos\widehat{z\,z'}\\
&-2\cos\widehat{x\,z}\,.\cos\widehat{y\,z}\,.\cos\widehat{y\,z'}\,.\cos\widehat{z\,z'}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(M)}
\end{aligned}$$

Maintenant que tous les angles marqués ci-dessus (A), (B), (C), (D), (E) sont connus, il nous reste à trouver les premières coordonnées x, y, z, en valeurs de ces angles connus, et des trois nouvelles coordonnées x', y', z'.

Pour cela, j'achève les deux parallélipipèdes APQRSMT, $ApqrsMt$, le premier, construit sur les premières coordonnées x, y, z, prises pour arêtes partant du point A : le second, construit sur les nouvelles coordonnées x', y', z' également prises pour arêtes du même point A; ces deux parallélipipèdes ayant par conséquent pour diagonale commune le rayon vecteur $\overline{AM}$.

Or la seule inspection de la figure démontre que $APTMtpA$ est un hexagone gauche dont les trois premiers côtés $\overline{AP}$, $\overline{PT}$, $\overline{TM}$, sont les anciennes coordonnées x, z, y; et les trois autres $\overline{Ap}$, $\overline{pt}$, $\overline{tM}$, sont les nouvelles coordonnées x', z', y', et que de plus les angles formés par ces droites deux à deux, sont ceux que font entre elles à l'origine A, les six arêtes $\overline{AP}$, $\overline{AQ}$, $\overline{AR}$; $\overline{Ap}$, $\overline{Aq}$, $\overline{Ar}$.

Mais on sait que dans tout polygone plan ou gauche, chacun des côtés est égal à la somme de tous les autres multipliés, chacun par le cosinus de l'angle qu'il forme avec le premier. Appliquant donc ce principe successivement à chacun des côtés $\overline{AP}$, $\overline{TM}$, $\overline{PT}$, ou x, y, z, de l'hexagone gauche $APTMtpA$, on aura les trois équations suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} x = x'\cos x\hat{\ }x' + y'\cos x\hat{\ }y' + z'\cos x\hat{\ }z' - y\cos x\hat{\ }y - z\cos x\hat{\ }z \\ y = x'\cos y\hat{\ }x' + y'\cos y\hat{\ }y' + z'\cos y\hat{\ }z' - x\cos y\hat{\ }x - z\cos y\hat{\ }z \\ z = x'\cos z\hat{\ }x' + y'\cos z\hat{\ }y' + z'\cos z\hat{\ }z' - x\cos z\hat{\ }x - y\cos z\hat{\ }y \end{array}\right\} \cdots (N)$$

équations qui ne renferment plus que les trois anciennes coordonnées, les trois nouvelles, et les neuf angles, ou immédiatement donnés ou déterminés par les équations de condition ci-dessus.

Pour embrasser le problème de la transformation des coordonnées dans toute sa généralité, il faut résoudre ces trois équations, afin d'en tirer les valeurs de x, y, z; ces équations étant toutes

du premier degré, l'opération n'est pas difficile; car si nous faisons pour abréger,

$$\left.\begin{array}{l}\cos x\widehat{\;}y=b,\ \cos x\widehat{\;}z=c,\ x'\cos x\widehat{\;}x'+y'\cos x\widehat{\;}y'+z'\cos x\widehat{\;}z'=d\\ \cos y\widehat{\;}x=e,\ \cos y\widehat{\;}z=g,\ x'\cos y\widehat{\;}x'+y'\cos y\widehat{\;}y'+z'\cos y\widehat{\;}z'=h\\ \cos z\widehat{\;}x=i,\ \cos z\widehat{\;}y=k,\ x'\cos z\widehat{\;}x'+y'\cos z\widehat{\;}y'+z'\cos z\widehat{\;}z'=m\end{array}\right\}\ldots(\mathrm{P})$$

On aura par la méthode ordinaire des éliminations, les trois équations suivantes qui satisfont à la question proposée,

$$\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{chk+bgm-dgk-bh-cm+d}{cek+bgi-gk-be-ci+1}\\ y=\dfrac{cem+gdi-chi-gm-de+h}{cek+bgi-gk-be-ci+1}\\ z=\dfrac{dek+bhi-bem-kh-di+m}{cek+bgi-gk-be-ci+1}\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots \mathrm{Q}$$

ce qu'il fallait trouver.

COROLLAIRE I.

69. Si l'on voulait connaître les trois angles $x'\widehat{\;}y'$, $x'\widehat{\;}z'$, $y'\widehat{\;}z'$; que forment entre eux les nouveaux axes deux à deux, il n'y aurait qu'à considérer les six axes x, y, z, x', y', z' quatre à quatre, en prenant deux des anciens et deux des nouveaux; et comme des six angles que formeraient ces quatre droites, il y en aurait cinq de donnés, le sixième se trouverait par la formule du problème XXI (50); par exemple, l'angle $x'\widehat{\;}y'$ se trouvera en combinant ces quatre axes

$$x,\ y,\ x',\ y',\quad \text{ou}\quad x,\ z,\ x',\ y',\quad \text{ou}\quad y,\ z,\ x',\ y',$$

d'où l'on tire (50) les trois formules suivantes, dont chacune donne l'angle cherché $x'\widehat{\;}y'$. Ainsi l'on choisira parmi ces trois valeurs équivalentes entre elles, celle qui conviendra le mieux, suivant les circonstances :

$$1-\cos^2\widehat{xy}-\cos^2\widehat{xx'}-\cos^2\widehat{yx'}-\cos^2\widehat{x'y'}-\cos^2\widehat{yy'}-\cos^2\widehat{xy'}$$
$$+\cos^2\widehat{xy}\,.\,\cos^2\widehat{x'y'}+\cos^2\widehat{xx'}\,.\,\cos^2\widehat{yy'}+\cos^2\widehat{yx'}\,.\,\cos^2\widehat{xy'}$$
$$+2\cos\widehat{xy}\,.\,\cos\widehat{xx'}\,.\,\cos\widehat{yx'}+2\cos\widehat{xy}\,.\,\cos\widehat{yy'}\,.\,\cos\widehat{xy'}$$
$$+2\cos\widehat{xx'}\,.\,\cos\widehat{xy'}\,.\,\cos\widehat{x'y'}+2\cos\widehat{yx'}\,.\,\cos\widehat{yy'}\,.\,\cos\widehat{x'y'}$$
$$-2\cos\widehat{xy}.\cos\widehat{xx'}.\cos\widehat{yy'}.\cos\widehat{x'y'}-2\cos\widehat{xy}.\cos\widehat{yx'}.\cos\widehat{xy'}.\cos\widehat{xy'}$$
$$-2\cos\widehat{xx'}.\cos\widehat{yx'}.\cos\widehat{yy'}.\cos\widehat{xy'}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (R)$$

$$1-\cos^2\widehat{xz}-\cos^2\widehat{xx'}-\cos^2\widehat{zx'}-\cos^2\widehat{x'y'}-\cos^2\widehat{zy'}-\cos^2\widehat{xy'}$$
$$+\cos^2\widehat{xz}\,.\,\cos^2\widehat{x'y'}+\cos^2\widehat{xx'}\,.\,\cos^2\widehat{zy'}+\cos^2\widehat{zx'}\,.\,\cos^2\widehat{xy'}$$
$$+2\cos\widehat{xz}\,.\,\cos\widehat{xx'}\,.\,\cos\widehat{zx'}+2\cos\widehat{xz}\,.\,\cos\widehat{zy'}\,.\,\cos\widehat{xy'}$$
$$+2\cos\widehat{xy'}\,.\,\cos\widehat{xx'}\,.\,\cos\widehat{x'y'}+2\cos\widehat{zx'}\,.\,\cos\widehat{zy'}\,.\,\cos\widehat{x'y'}$$
$$-2\cos\widehat{xz}.\cos\widehat{xx'}.\cos\widehat{zy'}.\cos\widehat{x'y'}-2\cos\widehat{xz}.\cos\widehat{zx'}.\cos\widehat{xy'}.\cos\widehat{x'y'}$$
$$-2\cos\widehat{xx'}.\cos\widehat{zx'}.\cos\widehat{zy'}.\cos\widehat{xy'}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (S)$$

$$1-\cos^2\widehat{yz}-\cos^2\widehat{yx'}-\cos^2\widehat{zx'}-\cos^2\widehat{zy'}-\cos^2\widehat{x'y'}-\cos^2\widehat{yy'}$$
$$+\cos^2\widehat{yz}\,.\,\cos^2\widehat{x'y'}+\cos^2\widehat{yx'}\,.\,\cos^2\widehat{zy'}+\cos^2\widehat{zx'}\,.\,\cos^2\widehat{yy'}$$
$$+2\cos\widehat{yz}\,.\,\cos\widehat{yx'}\,.\,\cos\widehat{zx'}+2\cos\widehat{yz}\,.\,\cos\widehat{zy'}\,.\,\cos\widehat{yy'}$$
$$+2\cos\widehat{yx'}\,.\,\cos\widehat{yy'}\,.\,\cos\widehat{x'y'}+2\cos\widehat{zx'}\,.\,\cos\widehat{zy'}\,.\,\cos\widehat{x'y'}$$
$$-2\cos\widehat{yz}.\cos\widehat{yx'}.\cos\widehat{zy'}.\cos\widehat{x'y'}-2\cos\widehat{yx'}.\cos\widehat{zx'}.\cos\widehat{zy'}.\cos\widehat{yy'}$$
$$-2\cos\widehat{yz}.\cos\widehat{zx'}.\cos\widehat{yy'}.\cos\widehat{x'y'}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (T)$$

COROLLAIRE II.

70. Si les trois premières coordonnées étaient rectangulaires, comme on le suppose ordinairement, on aurait évidemment

$$\cos\widehat{xy}=0,\qquad \cos\widehat{xz}=0,\qquad \cos\widehat{yz}=0;$$

ainsi les termes affectés du signe négatif dans les formules (N) disparaîtraient, et ces formules se réduiraient aux suivantes :

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\widehat{xx'}+y'\cos\widehat{xy'}+z'\cos\widehat{xz'} \\ y &= x'\cos\widehat{yx'}+y'\cos\widehat{yy'}+z'\cos\widehat{yz'} \\ z &= x'\cos\widehat{zx'}+y'\cos\widehat{zy'}+z'\cos\widehat{zz'} \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots (U).$$

Les équations de condition (K), (L), (M) trouvées ci-dessus se réduiraient à celles-ci :

$$\left.\begin{array}{l}\cos^2 x\hat{\ }x'+\cos^2 y\hat{\ }x'+\cos^2 z\hat{\ }x'=1\\ \cos^2 x\hat{\ }y'+\cos^2 y\hat{\ }y'+\cos^2 z\hat{\ }y'=1\\ \cos^2 x\hat{\ }z'+\cos^2 y\hat{\ }z'+\cos^2 z\hat{\ }z'=1\end{array}\right\}\ldots\ldots(V);$$

et enfin les équations (R), (S), (T), combinées entre elles et appliquées de même successivement aux autres angles $x'\hat{\ }z'$, $y'\hat{\ }z'$, se réduiraient aux trois suivantes :

$$\left.\begin{array}{l}\cos x'\hat{\ }y'=\cos x\hat{\ }x'.\cos x\hat{\ }y'+\cos y\hat{\ }x'.\cos y\hat{\ }y'+\cos z\hat{\ }x'.\cos z\hat{\ }y'\\ \cos x'\hat{\ }z'=\cos x\hat{\ }x'.\cos x\hat{\ }z'+\cos y\hat{\ }x'.\cos y\hat{\ }z'+\cos z\hat{\ }x'.\cos z\hat{\ }y'\\ \cos y'\hat{\ }z'=\cos x\hat{\ }y'.\cos x\hat{\ }z'+\cos y\hat{\ }y'.\cos y\hat{\ }z'+\cos z\hat{\ }y'.\cos z\hat{\ }z'\end{array}\right\}\ldots(X).$$

COROLLAIRE III.

71. Si au lieu de connaître les angles $x\hat{\ }y$, $x\hat{\ }z$, $y\hat{\ }z$, que forment entre eux les trois premiers axes, on connaissait les angles que forment entre eux les plans Axy, Axz, Ayz, qui contiennent deux à deux les arêtes partant du point A, angles que j'exprime (4) comme il suit :

$$\overline{Axy}\hat{\ }\overline{Axz},\quad \overline{Axy}\hat{\ }\overline{Ayz},\quad \overline{Axz}\hat{\ }\overline{Ayz},$$

il n'y aurait qu'à prendre les formules données par le lemme II,

$$\cos x\hat{\ }y=\frac{\cos.\overline{Axz}\hat{\ }\overline{Ayz}+\cos\overline{Axy}\hat{\ }\overline{Axz}.\cos\overline{Axy}\hat{\ }\overline{Ayz}}{\sin\overline{Axy}\hat{\ }\overline{Axz}\,.\,\sin\overline{Axy}\hat{\ }\overline{Ayz}}$$

$$\cos x\hat{\ }z=\text{etc.}$$

$$\cos y\hat{\ }z=\text{etc.}$$

et l'on substituerait ces valeurs de $\cos x\hat{\ }y$, $\cos x\hat{\ }z$, $\cos y\hat{\ }z$, dans les formules trouvées ci-dessus, ce qui donnerait toujours les valeurs des anciennes coordonnées en valeurs des nouvelles et d'angles connus.

ESSAI

SUR

LA THÉORIE DES TRANSVERSALES.

1. J'APPELLE *transversale* une ligne droite ou courbe qui traverse d'une manière quelconque un système d'autres lignes, soit droites, soit courbes; ou même un système de plans ou de surfaces courbes. Mais je ne parlerai dans cet Essai que des transversales droites et circulaires.

La théorie des transversales est curieuse par elle-même, et fournit souvent des démonstrations et des solutions très-élégantes, dans des questions compliquées. La simplicité et la fécondité de ses principes semblerait lui donner le droit d'être admise dans les élémens ordinaires de Géométrie.

2. Au fond, cette théorie est la même que celle des coordonnées; car si l'on suppose que MOM′ soit une courbe rapportée à deux axes $\overline{AP}$, $\overline{AQ}$, dont l'origine est au point A, que $\overline{AP}$, $\overline{PM}$ soient les coordonnées du point M, et que par le même point M, on mène entre les axes une transversale quelconque $\overline{pMq}$ sous un angle donné ApM; les deux triangles semblables pPM, pAq FIG. 1.

donneront

$$\overline{PM} = \overline{pM}\,\frac{\sin PpM}{\sin pPM}\,;\quad \overline{QM} = \overline{qM}\,\frac{\sin QqM}{\sin qQM}\,;$$

donc en nommant x, y les coordonnées $\overline{AP}$, $\overline{PM}$ du point décrivant M; x', y', les parties correspondantes $\overline{pM}$, $\overline{qM}$ de la transversale; a, b, les angles donnés PAa, Apq, les équations précédentes deviendront

$$y = y'\,\frac{\sin b}{\sin a}\,,\quad x = x'\,\frac{\sin(a+b)}{\sin a}\,;$$

d'où l'on voit qu'en substituant pour les coordonnées x, y dans l'équation de la courbe MoM', leurs valeurs ci-dessus, on aura une équation du même degré entre x', y'; c'est-à-dire, entre les portions $\overline{Mp}$, $\overline{Mq}$, de la transversale pMM'q.

Ainsi la théorie des transversales n'est, à proprement parler, que la théorie des coordonnées qui, au lieu de faire un angle, sont prises sur une même droite, ce qui paraît être un degré de simplification; puisque d'ailleurs le degré de l'équation ne hausse pas, et qu'on peut changer l'origine et la direction des transversales, comme on change l'origine et la direction des coordonnées.

THÉORÈME I.

3. *Si les trois côtés d'un triangle ou leurs prolongemens sont coupés par une transversale quelconque indéfinie, il y aura sur la direction de chacun des côtés du triangle, deux segmens formés par la transversale, et tels que le produit de trois d'entre eux, n'ayant aucune extrémité commune, est toujours égal au produit des trois autres.*

FIG. 2, 3, 4 et 5. *Démonstration.* Soit ABC le triangle proposé, abc la transversale menée dans le plan de ce triangle, et coupant les côtés $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$, ou leurs prolongemens respectivement en a, b, c; il y aura sur la direction de chacun de ces côtés ou sur son prolongement, deux segmens formés par la transversale, c'est-à-dire,

deux portions comprises entre cette transversale et les angles placés sur cette direction ; savoir :

$\overline{Ac}$, $\overline{Bc}$ sur $\overline{AB}$; $\overline{Ab}$, $\overline{Cb}$ sur $\overline{AC}$; $\overline{Ba}$, $\overline{Ca}$ sur $\overline{BC}$.

Il s'agit donc de prouver que le produit $\overline{Ab}.\overline{Bc}.\overline{Ca}$, qui a pour facteurs les trois segmens $\overline{Ab}$, $\overline{Bc}$, $\overline{Ca}$, non contigus, ou qui n'ont point d'extrémités communes, est égal au produit $\overline{Ac}$, $\overline{Ba}$, $\overline{Cb}$, des trois autres segmens $\overline{Ac}$, $\overline{Ba}$, $\overline{Cb}$, qui sont également non contigus entre eux.

Or par le sommet de l'un quelconque des angles du triangle proposé, comme B, soit menée une parallèle au côté opposé $\overline{AC}$, et qui rencontre en k la transversale.

Les deux triangles semblables Abc, Bkc, d'une part, et de l'autre, les deux triangles semblables Cab, Bak donnent les deux proportions suivantes :

$$\overline{Ab} : \overline{Ac} :: \overline{Bk} : \overline{Bc},$$

$$\overline{Ca} : \overline{Cb} :: \overline{Ba} : \overline{Bk}.$$

Multipliant ces deux proportions, et effaçant les termes qui se détruisent, on a en égalant le produit des extrêmes au produit des moyens,

$$\overline{Ab} . \overline{Bc} . \overline{Ca} = \overline{Ac} . \overline{Ba} . \overline{Cb} \ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

ce qu'il fallait démontrer.

On voit que la même démonstration a lieu, soit que la transversale coupe l'aire même du triangle, ou qu'elle passe au dehors.

Ce théorème qui doit être regardé comme le principe fondamental de toute la théorie des transversales, est susceptible d'une très-grande généralisation : car il s'étend, comme on le verra par les théorèmes qui suivent, à tous les polygones soit plans, soit gauches, et même aux polygones sphériques.

COROLLAIRE I.

4. Les trois côtés du triangle et la transversale peuvent être regardés comme les quatre côtés d'un quadrilatère BCbc, et chacun des côtés de ce quadrilatère peut être pris à son tour pour transversale, à l'égard du triangle formé par les trois autres prolongés jusqu'à leurs rencontres respectives : ce qui donnera par la même raison, les quatre équations suivantes, parmi lesquelles est comprise la formule (A) trouvée ci-dessus :

$$\left.\begin{array}{l} \overline{\mathrm{A}b}\,.\,\overline{\mathrm{B}c}\,.\,\overline{\mathrm{C}a} = \overline{\mathrm{A}c}\,.\,\overline{\mathrm{B}a}\,.\,\overline{\mathrm{C}b} \\ \overline{\mathrm{AB}}\,.\,\overline{\mathrm{C}b}\,.\,\overline{ac} = \overline{\mathrm{AC}}\,.\,\overline{\mathrm{B}c}\,.\,\overline{ab} \\ \overline{\mathrm{A}c}\,.\,\overline{\mathrm{BC}}\,.\,\overline{ab} = \overline{\mathrm{AB}}\,.\,\overline{\mathrm{C}a}\,.\,\overline{bc} \\ \overline{\mathrm{AC}}\,.\,\overline{\mathrm{B}a}\,.\,\overline{bc} = \overline{\mathrm{A}b}\,.\,\overline{\mathrm{BC}}\,.\,\overline{ac} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{B})$$

Mais il faut remarquer que ces quatre équations se réduisent à trois essentiellement différentes : car si, par exemple, on multiplie ensemble les trois premières, on aura la quatrième.

COROLLAIRE II.

5. Si l'on multiplie l'une par l'autre la première et la troisième des équations (B), et qu'on efface les termes qui se détruisent, on aura

$$\overline{\mathrm{BC}}\,.\,\overline{\mathrm{B}c}\,.\,\overline{b\mathrm{A}}\,.\,\overline{ba} = \overline{b\mathrm{C}}\,.\,\overline{bc}\,.\,\overline{\mathrm{BA}}\,.\,\overline{\mathrm{B}a} \ldots\ldots\ldots (\mathrm{C})$$

ou

$$\overline{\mathrm{BC}}\,.\,\overline{\mathrm{B}c} : \overline{b\mathrm{C}}\,.\,\overline{bc} :: \overline{\mathrm{BA}}\,.\,\overline{\mathrm{B}a} : \overline{b\mathrm{A}}\,.\,\overline{ba} \ldots\ldots\ldots (\mathrm{D})$$

c'est-à-dire, que dans le quadrilatère BCbc, le produit des deux côtés $\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{B}c}$, adjacens à l'un des angles comme B, est au produit des deux côtés $\overline{b\mathrm{C}}$, $\overline{bc}$, adjacens à l'angle opposé b, comme le produit des segmens $\overline{\mathrm{BA}}$, $\overline{\mathrm{B}a}$, interceptés sur les premiers, depuis l'angle B d'où ils partent, jusqu'aux directions des deux autres prolongés au besoin, est au produit des segmens

$\overline{bA}$, $\overline{ba}$, interceptés depuis l'angle b d'où ils partent, jusqu'aux directions des deux premiers.

Remarque.

6. On obtient une formule de même nature en multipliant deux à deux les autres équations (B) du corollaire précédent; et comme la même démonstration a lieu, quelle que soit la disposition respective des quatre points B, C, b, c, tant qu'ils ne sortent pas du même plan, nous pouvons prendre ici le nom de quadrilatère, dans un sens plus étendu qu'on ne le fait ordinairement.

Nous entendons donc par quadrilatère en général, l'assemblage de quatre lignes droites qui joignent quatre points pris à volonté sur un plan, en les prenant dans quel ordre on veut, puis passant du premier au second, du second au troisième, du troisième au quatrième et du quatrième au premier; d'où il est aisé de voir que les quadrilatères peuvent être de trois formes différentes, savoir, le quadrilatère ordinaire BCbc (fig. 2), que je nomme quadrilatère de la première espèce; le quadrilatère à angle rentrant BCbc (fig. 3), que je nomme quadrilatère de la seconde espèce, et le quadrilatère BCbc (fig. 5), qui a la forme de deux triangles opposés par le sommet, et que je nomme quadrilatère de la troisième espèce.

Chacun de ces quadrilatères, considéré séparément, s'appelle quadrilatère simple; mais la figure qui résulte de leur assemblage, et qu'on obtient évidemment, en prolongeant tous les côtés d'un quadrilatère simple quelconque, jusqu'à leurs rencontres respectives; cette figure, dis-je, se nomme *quadrilatère complet*.

Le quadrilatère complet ABFCGDA est donc formé des trois quadrilatères simples ABCD, AFCG, BFDG: les diagonales de chacun d'eux sont les droites qui joignent le premier angle avec le troisième, et le second avec le quatrième. Ainsi les deux diagonales du quadrilatère ABCD de la première espèce sont $\overline{AC}$, $\overline{BD}$; celles du quadrilatère AFCG de la deuxième espèce sont $\overline{AC}$, $\overline{FG}$, et celles du quadrilatère BFDG de la troisième espèce sont $\overline{BD}$, $\overline{FG}$; ces six diagonales se réduisent, comme on FIG. 6.

le voit, aux trois $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{FG}$; d'où il suit que le quadrilatère simple a seulement deux diagonales, mais que le quadrilatère complet en a trois. Les points h, k, l indiquent les trois intersections de ces diagonales prises deux à deux, et cette figure a des propriétés infiniment remarquables, comme on l'a déjà vu par le théorème précédent, et comme on le verra encore dans ce qui doit suivre.

THÉORÈME II.

7. *Si tous les côtés d'un polygone plan, ou leurs prolongemens, sont coupés par une transversale quelconque indéfinie, il y aura sur chacun de ces côtés, ou sur son prolongement, deux segmens formés par la transversale, tels que le produit de tous ceux de ces segmens qui n'ont point d'extrémités communes sera égal au produit de tous les autres, et chacun de ces produits aura autant de facteurs qu'il y a de côtés au polygone.*

FIG. 7. *Démonstration.* Soit, par exemple, le pentagone ABCDE, coupé par la transversale $\overline{mnpqr}$: je dis qu'on aura

$$\overline{Am}.\overline{Bn}.\overline{Cr}.\overline{Dp}.\overline{Eq}=\overline{Aq}.\overline{Bm}.\overline{Cn}.\overline{Dr}.\overline{Ep},$$

équation à deux termes, dans laquelle on voit que chacun d'eux est composé de cinq facteurs, nombre égal à celui des côtés du polygone, et tels que tous ceux de ces facteurs qui entrent dans le même terme n'ont point d'extrémités communes, puisqu'en effet aucune des dix lettres A, B, C, D, E, m, n, p, q, r, s, t, qui désignent les extrémités de ces segmens, ne se trouve deux fois dans le même membre.

Pour démontrer cette proposition, de l'un quelconque des angles du polygone, comme A, menons des diagonales $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, à tous les autres, et prolongeons, tant ces diagonales que les côtés du polygone, jusqu'à la transversale en m, n, p, q, r, s, t. Cela posé, par le théorème premier, les triangles ABC, ACD, AED, considérés séparément comme coupés par la transversale proposée, donneront

$$\overline{Am}.\overline{Bn}.\overline{Cs}=\overline{As}.\overline{Bm}.\overline{Cn}$$

$$\overline{As}.\overline{Cr}.\overline{Dt}=\overline{At}.\overline{Cs}.\overline{Dr}$$

$$\overline{At}.\overline{Dp}.\overline{Eq}=\overline{Aq}.\overline{Dt}.\overline{Ep}.$$

Multipliant ensemble toutes ces équations et effaçant les termes qui se détruisent, nous aurons

$$\overline{Am}.\overline{Bn}.\overline{Cr}.\overline{Dp}.\overline{Eq}=\overline{Aq}.\overline{Bm}.\overline{Cn}.\overline{Dr}.\overline{Ep}.......(A),$$

ce qu'il fallait prouver.

Ce théorème est une généralisation du théorème premier et un cas particulier du suivant.

THÉOREME III.

8. *Si tous les côtés d'un polygone gauche, ou leurs prolongemens, sont coupés par un plan que j'appellerai transversal, il y aura sur chacun de ses côtés ou sur son prolongement, deux segmens formés par le plan transversal, tels que le produit de tous ceux de ces segmens qui n'ont point d'extrémités communes, sera égal au produit de tous les autres, et chacun de ces produits aura autant de facteurs qu'il y a de côtés au polygone.*

Démonstration. En regardant *mnpqrst* non comme une droite, mais comme le plan transversal dont il s'agit, projeté sur un autre plan qui lui soit perpendiculaire, le raisonnement sera absolument le même que celui qui a été fait dans la démonstration du théorème précédent, et l'on trouvera pareillement FIG. 7.

$$\overline{Am}.\overline{Bn}.\overline{Cr}.\overline{Dp}.\overline{Eq}=\overline{Aq}.\overline{Bm}.\overline{Cn}.\overline{Dr}.\overline{Ep}.......(A),$$

ce qu'il fallait prouver.

Il faut remarquer que dans cette formule, $\overline{Am}$, $\overline{Bn}$, $\overline{Cr}$, etc. expriment les segmens même formés sur les côtés du polygone

gauche proposé, et non pas leurs simples projections sur le plan perpendiculaire au plan transversal.

Le théorème suivant montre que cette théorie s'étend au cas où la transversale est une ligne circulaire.

THÉORÈME IV.

9. *Si tous les côtés d'un polygone plan quelconque sont coupés par une transversale circulaire, c'est-à-dire, s'ils sont tous, ou leurs prolongemens, rencontrés par la circonférence d'un cercle, cette circonférence coupant chacun des côtés, en deux points, déterminera sur chacun d'eux quatre segmens entre elle et les angles qui terminent ce côté. Or de tous ces segmens, le produit de la moitié pris pour facteurs, sera égal au produit de tous les autres, en les prenant tous de manière qu'il n'en entre jamais deux dans le même produit qui aient pour extrémité un même point de la circonférence.*

FIG. 8. *Démonstration.* Je me bornerai à démontrer cette proposition sur le triangle, le même raisonnement étant applicable à tout autre polygone. Soit donc ABC le triangle proposé, dont le côté $\overline{BC}$ soit rencontré en a, a', par la transversale circulaire, le côté $\overline{AC}$ en b, b', et le côté $\overline{AB}$ en c, c', desorte que, par exemple, les quatre segmens formés sur $\overline{AB}$ par la circonférence, seront $\overline{Ac}$, $\overline{Ac'}$, $\overline{Bc}$, $\overline{Bc'}$; il s'agit donc de prouver qu'on doit avoir

$$\overline{Ab}.\overline{Ab'}.\overline{Bc}.\overline{Bc'}.\overline{Ca}.\overline{Ca'}=\overline{Ac}.\overline{Ac'}.\overline{Ba}.\overline{Ba'}.\overline{Cb}.\overline{Cb'}\ldots\ldots(A).$$

Or cette proposition est facile à appercevoir, car par la propriété des sécantes au cercle, on a les trois équations suivantes:

$$\overline{Ab}.\overline{Ab'}=\overline{Ac}.\overline{Ac'},\quad \overline{Bc}.\overline{Bc'}=\overline{Ba}.\overline{Ba'},\quad \overline{Ca}.\overline{Ca'}=\overline{Cb}.\overline{Cb'}.$$

Multipliant ensemble ces trois équations, on aura la formule (A), *ce qu'il fallait prouver.*

COROLLAIRE.

10. Il est aisé de voir que la même démonstration aurait lieu pour tout autre polygone que le triangle, et qu'elle serait applicable également, en la modifiant comme au théorème III, si ce polygone, au lieu d'être plan, était gauche, en supposant qu'alors tous les côtés fussent coupés par une surface sphérique, tenant lieu du plan transversal dont il a été question dans ce théorème III.

L'ellipse pouvant être considérée comme une projection du cercle, il est aisé de lui appliquer la proposition précédente, puisque les projections des parties d'une même droite sont entre elles en même rapport que ces parties elles-mêmes; d'où il suit que le rapport des deux membres de l'équation (A) étant 1 pour le cercle, doit rester 1 pour l'ellipse.

Cette proposition a lieu également pour toutes les autres sections coniques, et lorsque le polygone est gauche, elle s'applique aux surfaces formées par la révolution de ces courbes autour de leur axe.

Mais cette même proposition est susceptible d'une beaucoup plus grande généralité, car elle s'étend à toutes les courbes géométriques prises pour transversales lorsque le polygone est plan, et à toutes les surfaces dont les sections faites par des plans quelconques sont des courbes géométriques, lorsque le polygone est gauche. Mais mon intention étant de ne m'occuper ici que des transversales droites et circulaires, je me borne à indiquer ces objets, sur lesquels on peut consulter ma Géométrie de position.

THÉORÈME V.

11. *Si par un point quelconque pris dans le plan d'un triangle, on mène sur chacun des côtés une transversale qui passe par l'angle opposé, on obtiendra sur chacun de ces côtés deux segmens, tels que le produit de trois d'entre eux n'ayant aucune extrémité commune, sera égal au produit des trois autres.*

FIG. 9, 10. *Démonstration.* Soit ABC le triangle proposé, D le point pris à volonté dans le plan de ce triangle; $\overline{Aa}$, $\overline{Bb}$, $\overline{Cc}$ les droites menées de ce point sur les côtés $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$, en passant par les sommets A, B, C, des angles respectivement opposés. On obtiendra sur le côté BC, les deux segmens $\overline{Ba}$, $\overline{Ca}$, sur le côté $\overline{AC}$ les deux segmens $\overline{Ab}$, $\overline{Cb}$, et enfin sur le côté $\overline{AB}$ les deux segmens $\overline{Ac}$, $\overline{Bc}$; il s'agit donc de prouver que le produit Ca des trois segmens $\overline{Ab}$, $\overline{Bc}$, $\overline{Ca}$, non contigus, ou qui n'ont point d'extrémités communes, est égal au produit des trois autres segmens qui sont également non contigus; c'est-à-dire, qu'on a

$$\overline{Ab}\,.\,\overline{Bc}\,.\,\overline{Ca}=\overline{Ac}\,.\,\overline{Ba}\,.\,\overline{Cb}.$$

Considérons, par exemple, les deux triangles AaB, AaC, coupés respectivement par les transversales $\overline{Cc}$, $\overline{Bb}$; ils donneront par le théorème I,

$$\overline{Ac}\,.\,\overline{BC}\,.\,\overline{aD}=\overline{AD}\,.\,\overline{Bc}\,.\,\overline{Ac},$$

$$\overline{AD}\,.\,\overline{aB}\,.\,\overline{Cb}=\overline{aD}\,.\,\overline{BC}\,.\,\overline{Ab}.$$

Multipliant ces deux proportions, et effaçant les termes qui se détruisent, on a

$$\overline{Ab}\,.\,\overline{Bc}\,.\,\overline{Ca}=\overline{Ac}\,.\,\overline{Ba}\,.\,\overline{Cb}\ldots\ldots\ldots\ldots(A)$$

ce qu'il fallait démontrer.

Cette proposition a également lieu comme on le voit, soit que le point D d'où partent les trois transversales, soit pris sur l'aire même du triangle, soit qu'il soit pris au dehors.

THÉOREME VI.

12. *Dans tout quadrilatère complet ayant ses trois diagonales, chacune d'elles est coupée par les deux autres en segmens proportionnels.*

Soit ABFCGDA le quadrilatère complet proposé, avec ses diagonales $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{FG}$, qui se coupent respectivement en l, k, h; il s'agit donc de prouver, que l'une quelconque d'entre elles, comme $\overline{AC}$, par exemple, est coupée en l et en h, de manière que les segmens $\overline{Al}$, $\overline{Cl}$, formés par l'une d'entre elles $\overline{BD}$, font entre eux comme les segmens $\overline{Ah}$, $\overline{Ch}$, déterminés par l'autre $\overline{FG}$ sur la même première diagonale $\overline{AC}$, c'est-à-dire qu'on a FIG. 6.

$$\overline{Al} : \overline{Cl} :: \overline{Ah} : \overline{Ch}.$$

Pour cela, je considère le triangle ABC, qui a pour ses sommets, trois de ceux du quadrilatère simple ABCD, dont $\overline{AC}$ est la diagonale. Ce triangle étant coupé par trois transversales partant d'un même point D pris dans son plan et passant par ses trois angles, nous devons avoir par le théorème précédent,

$$\overline{Al} \,.\, \overline{CG} \,.\, \overline{BF} = \overline{Cl} \,.\, \overline{BG} \,.\, \overline{AF}.$$

d'un autre côté, ce même triangle coupé par la transversale $\overline{KFG}$ qui ne passe par aucun de ses angles, donne, en vertu du théorème I,

$$\overline{AF} \,.\, \overline{Ch} \,.\, \overline{BG} = \overline{BF} \,.\, \overline{Ah} \,.\, \overline{CG}.$$

Multipliant ces deux équations l'une par l'autre, et effaçant les termes qui se détruisent, nous aurons

$$\overline{Al} \,.\, \overline{Ch} = \overline{Ah} \,.\, \overline{Cl} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A),$$

ou .... $\overline{Al} : \overline{Cl} :: \overline{Ah} : \overline{Ch}$ .... (B)

ce qu'il fallait démontrer.

Par la même raison, nous aurons pour chacune des deux autres diagonales BD, FG du quadrilatère complet ABFCGD,

$$\overline{Bl} : \overline{Dl} :: \overline{Bk} : \overline{Dk},$$

$$\overline{Fk} : \overline{Gk} :: \overline{Fh} : \overline{Gh}.$$

COROLLAIRE.

FIG. 6. 13. Si par le point k on imagine une nouvelle transversale $kB'l'D'$, qui coupe les droites $\overline{AF}$, $\overline{Ah}$, $\overline{AG}$, respectivement aux points B′, l', D′, la partie $\overline{B'D'}$ de cette transversale, interceptée entre les côtés $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ du quadrilatère, sera coupée, de même que $\overline{BD}$, en segmens proportionnels, par les points k, l'; c'est-à-dire qu'on aura

$$\overline{B'l'} : \overline{D'l'} :: \overline{B'k} : \overline{D'k} :$$

car si l'on conçoit les droites $\overline{GB'}$, $\overline{FD'}$ elles formeront avec les droites $\overline{AB'}$, $\overline{AD'}$, un nouveau quadrilatère AB′C′D′, qui aura les mêmes propriétés que le quadrilatère ABCD. Or $\overline{B'D'}$ et $\overline{FG}$ sont évidemment deux de ses diagonales; donc $\overline{FG}$ devra être coupée en segmens proportionnels par les deux autres. Donc, puisque l'une de ces autres diagonales passe par le point k, l'autre passera par le point h; donc cette autre diagonale se confondra avec $\overline{AC}$ pour sa direction; c'est-à-dire, que l'angle C′ du nouveau quadrilatère tombe sur la droite $\overline{AC}$; donc, conformément au théorème, on a réellement

$$\overline{B'l'} : \overline{D'l'} :: \overline{B'k} : \overline{Dk} \ldots\ldots\ldots\ldots (C)$$

On voit, par ce qui vient d'être dit, que le point C′ se trouvant sur $\overline{AC}$, il doit en être de même, quelle que soit la position de la transversale $\overline{kB'D'}$; et que parconséquent la droite $\overline{Ah}$ sera le lieu de tous les points C, C′, etc. déterminés par le croisement des droites menées des points F, G, aux points D′, B′.

THÉORÈME VII.

FIG. 11. 14. *Si une droite quelconque $\overline{BD}$ est coupée aux points* b, d, *en segmens proportionnels, je dis que si d'un autre point quel-*

conque A de l'espace, on mène aux quatre points de division B, D, b, d, *quatre droites* $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{A\mathrm{b}}$, $\overline{A\mathrm{d}}$; *toute autre transversale* $\overline{B'D'}$, *menée entre les droites* $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, *sera coupée, comme la première* $\overline{BD}$, *en segmens proportionnels par les droites* $\overline{A\mathrm{b}}$, $\overline{A\mathrm{d}}$.

Démonstration. Par hypothèse, nous avons

$$\overline{\mathrm{B}b} : \overline{\mathrm{B}d} :: \overline{\mathrm{D}b} : \overline{\mathrm{D}d}.$$

Or les triangles BAb, BAd; DAb, DAd, donnent

$$\overline{\mathrm{B}b} = \overline{\mathrm{AB}}\,\frac{\sin \mathrm{BA}b}{\sin \mathrm{A}b\mathrm{B}},\quad \overline{\mathrm{B}d} = \overline{\mathrm{AB}}\,\frac{\sin \mathrm{BA}d}{\sin \mathrm{A}d\mathrm{B}},\quad \overline{\mathrm{D}b} = \overline{\mathrm{AD}}\,\frac{\sin \mathrm{DA}b}{\sin \mathrm{A}b\mathrm{D}},\quad \overline{\mathrm{D}d} = \overline{\mathrm{AD}}\,\frac{\sin \mathrm{DA}d}{\sin \mathrm{A}d\mathrm{D}};$$

Substituant ces valeurs de $\overline{\mathrm{B}b}$, $\overline{\mathrm{B}d}$, $\overline{\mathrm{D}b}$, $\overline{\mathrm{D}d}$, dans la proportion précédente, et réduisant, on aura

$$\sin \mathrm{BA}b : \sin \mathrm{BA}d :: \sin \mathrm{DA}b : \sin \mathrm{DA}d \ldots\ldots\ldots \text{(A)}$$

Donc réciproquement, si cette relation a lieu entre les quatre angles BAb, BAd, DAb : DAd, la droite $\overline{\mathrm{BD}}$ sera nécessairement coupée aux points b, d, en segmens proportionnels, puisque si cela n'était pas, il faudrait pour que cela fût, prendre le point d plus près ou plus loin du point D, les trois points B, b, D restant les mêmes. Mais alors la relation des angles ne serait plus la même; donc, puisqu'on la suppose donnée, la droite $\overline{\mathrm{BD}}$ est réellement coupée en segmens proportionnels aux points B, D.

Or ce que je viens de dire de la droite $\overline{\mathrm{BD}}$, peut se dire également de toute autre droite $\overline{\mathrm{B'D'}}$; donc cette droite $\overline{\mathrm{B'D'}}$ est aussi coupée en segmens proportionnels aux points b', d'; *ce qu'il fallait démontrer.*

COROLLAIRE I.

15. On doit remarquer que la démonstration précédente est composée de deux parties qui forment deux propositions distinctes très-remarquables l'une et l'autre. La première est que si une

droite $\overline{BD}$ étant coupée en segmens proportionnels aux points b, d, on mène d'un point quelconque A de l'espace, les quatre droites $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{Ab}$, $\overline{Ad}$, les angles formés au point auront la relation suivante :

$$\sin BAb : \sin BAd :: \sin DAb : \sin DAd \ldots\ldots\ldots (A)$$

La seconde est que réciproquement, si quatre droites partant d'un même point A, et tracées dans un même plan, forment entre elles des angles qui aient la relation dont on vient de parler, toute droite comme $\overline{BD}$ ou $\overline{B'D'}$, tirée entre les côtés $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ de l'angle BAD, sera coupée par les deux autres $\overline{Ab}$, $\overline{Ad}$ en segmens proportionnels.

COROLLAIRE II.

16. La proportion $\overline{Bb} : \overline{Bd} :: \overline{Db} : \overline{Dd}$ donne, en renversant les termes,

$$\overline{dD} : \overline{dB} :: \overline{bD} : \overline{bB} \ldots\ldots\ldots\ldots (B)$$

c'est-à-dire que si une droite $\overline{BD}$ est divisée en segmens proportionnels aux points b, d; réciproquement $\overline{db}$ sera coupée en segmens proportionnels aux points D, B.

D'où il suit, d'après ce qui vient d'être dit, qu'on aura aussi

$$\sin bAD : \sin dAB :: \sin bAD : \sin bAB \ldots\ldots (C)$$

COROLLAIRE III.

17. Nous avons vu par le corollaire du théorème VI, que la
FIG. 6. droite $\overline{B'D'}$, menée entre $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, et passant par le point k, est coupée en segmens proportionnels aux points k et l'. Nous pouvons maintenant généraliser cette proposition ; car si l'on mène la droite $\overline{Ak}$, et que par un point quelconque o de cette droite, on mène une transversale $\overline{ompn}$; la droite $\overline{mn}$ sera coupée en segmens proportionnels aux points o, p ; c'est-à-dire, qu'on aura

$$\overline{mo} : \overline{mp} :: \overline{no} : \overline{np} \ldots\ldots\ldots\ldots (D)$$

ce qui est évident par le théorème VII, puisque la droite $\overline{FG}$ comprise entre les mêmes droites $\overline{AF}$, $\overline{AG}$, que la droite $\overline{mn}$ est coupée en segmens proportionnels par les droites $\overline{Ak}$, $\overline{Ah}$, qui coupent l'autre aux points o, p.

THÉORÈME VIII.

18. *Si l'on coupe un quadrilatère simple quelconque par une transversale ; la portion de cette transversale interceptée entre les deux diagonales, sera coupée en segmens proportionnels par les deux droites menées du point d'intersection de ces deux diagonales, aux deux points de concours des côtés opposés du quadrilatère.*

Démonstration. Soit ABCD le quadrilatère simple proposé, FIG. 12. $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ seront ses deux diagonales, K leur point de concours, F le point de concours des côtés opposés $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ du quadrilatère proposé, et enfin C le point de concours des côtés opposés $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ du même quadrilatère. Il s'agit donc de prouver que toute transversale $\overline{mn}$, menée entre ces deux diagonales, sera coupée en segmens proportionnels par les points p, q, où elle est coupée par les droites $\overline{KG}$, $\overline{KF}$, menées du point d'intersection K des diagonales, aux points d'intersection G, F des côtés opposés du quadrilatère; c'est-à-dire, qu'on doit avoir

$$\overline{mp} : \overline{mq} :: \overline{np} : \overline{nq}.$$

Considérons le quadrilatère complet GDAKBCG : ses trois diagonales seront $\overline{KG}$, $\overline{CD}$, $\overline{AB}$; et par le théorème VI, chacune d'elles est coupée par les deux autres en segmens proportionnels. Appliquant donc ce principe à la diagonale $\overline{AB}$, il se trouvera que cette droite $\overline{AB}$ comprise entre les droites $\overline{KA}$, $\overline{KB}$, sera coupée aux points o et F, en segmens proportionnels par les deux autres droites $\overline{KG}$, $\overline{KF}$ partant du même point K; donc par le

théorème VII, toute autre transversale, comme mn, comprise entre les deux premières $\overline{\mathrm{KA}}$, $\overline{\mathrm{KB}}$, sera de même divisée par les deux autres $\overline{\mathrm{KG}}$, $\overline{\mathrm{KF}}$ en segmens proportionnels. Or cette transversale $\overline{mn}$ est rencontrée par ces dernières en p et q : donc on a

$$\overline{mp} : \overline{mq} :: \overline{np} : \overline{nq} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{A})$$

ce qu'il fallait prouver.

THÉORÈME IX.

19. *Si une même droite sert d'intersection commune à quatre points différens, et qu'ayant mené à volonté entre deux de ces plans une transversale indéfinie ; cette transversale se trouve coupée par les deux autres plans en segmens proportionnels ; toute autre transversale menée entre les deux premiers plans, sera coupée aussi par les deux autres en segmens proportionnels.*

Démonstration. Supposons que tout le système soit représenté en projection, sur un plan perpendiculaire à la droite qui sert d'intersection aux quatre plans proposés. Que A soit la projection
FIG. 13. de cette intersection commune $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{AD}}$, $\overline{\mathrm{A}b}$, $\overline{\mathrm{A}d}$, celles des quatre plans proposés, $\overline{\mathrm{BD}}$ la droite qui, par hypothèse étant menée entre les deux plans $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{AD}}$, est coupée en segmens proportionnels aux points b, d, par les deux autres ; enfin $\overline{\mathrm{B'D'}}$ une autre transversale quelconque comprise entre les plans $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{AD}}$, et rencontrée par les deux autres en b', d'. Il s'agit donc de prouver qu'on doit toujours avoir

$$\overline{\mathrm{B}b'} : \overline{\mathrm{B}d'} :: \overline{\mathrm{D}b'} : \overline{\mathrm{D}d'}.$$

Je mène la droite $\overline{\mathrm{B'}d}$, et par les droites $\overline{\mathrm{B}d}$, $\overline{\mathrm{B'}d}$, j'imagine un plan qui ira couper la droite A en un point quelconque. Quel que soit ce point, la droite B'D'' sera (14) coupée en segmens proportionnels aux points b'', d. Maintenant, imaginons par les deux droites $\overline{\mathrm{B'}d}$, $\overline{\mathrm{B'}d'}$, un nouveau plan qui coupera encore l'inter-

section commune A en un point quelconque. Quel que soit ce point, la droite $\overline{B'D''}$ étant, comme on vient de le voir, coupée en segmens proportionnels aux points b'', d; l'autre $\overline{B'D'}$ sera également coupée en segmens proportionnels aux points b', d' : donc on aura

$$\overline{B'b'} : \overline{Bd'} :: \overline{D'b'} : \overline{D'd'} \ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

Ce qu'il fallait prouver.

COROLLAIRE.

20. Il suit de là évidemment, que si quatre plans quelconques AB, Ab, AD, Ad ayant une intersection commune A, la relation des angles qu'ils forment entre eux, est

$$\sin BAb : \sin BAd :: \sin DAb : \sin DAd.$$

La même relation existera entre les angles formés par les intersections de ces quatre plans avec un cinquième plan quelconque.

THÉORÈME X.

21. *Si d'un point quelconque A pris hors d'une droite* $\overline{BK}$, FIG. 14.
on mène à cette ligne tant d'autres droites $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$ *qu'on voudra, et qu'ayant mené du point K une transversale* $\overline{Kb}$, *qui coupe toutes ces droites partant du point A en* b, c, d, e, *on trace les diagonales* $\overline{Bc}$, $\overline{Cb}$, $\overline{Cd}$, $\overline{Dc}$, *etc. de tous les quadrilatères B*Ccb, *C*Ddc, *B*Ddb, *etc.; je dis que tous les points de croisement* m, n, p, *etc., des diagonales de chacun de ces quadrilatères, seront dans une même droite qui passera par le point K.*

Démonstration. Prenons, par exemple, le point m ; la droite $\overline{Km}$ est l'une des diagonales du quadrilatère complet KcbmBCK, et les deux autres sont $\overline{Bb}$, $\overline{Cc}$. Or par le théorème VI, chacune de ces trois diagonales est coupée par les deux autres en segmens

proportionnels ; donc si la droite $\overline{Km}$ coupe $\overline{Bb}$ en K′, les points A et K′ couperont cette droite B*b* en segmens proportionnels. Donc par le théorème VII, chacune des autres droites $\overline{Cc}$, $\overline{Dd}$, $\overline{Ee}$, sera pareillement coupée par la même droite $\overline{Km}$, en segmens proportionnels.

Mais par la même raison, la droite $\overline{Kn}$ doit couper de même toutes les droites $\overline{Bb}$, $\overline{Cc}$, $\overline{Dd}$, $\overline{Ee}$ en segmens proportionnels ; ainsi des autres, comme *p*, etc.

Donc toutes les droites $\overline{Km}$, $\overline{Kn}$, $\overline{Kp}$ ne forment qu'une seule et même droite partant du point K. *Ce qu'il fallait prouver.*

THÉORÈME XI.

FIG. 14. 22. *Si d'un point quelconque A pris hors d'un plan représenté par la droite* $\overline{BK}$, *on mène à ce plan tant de droites* $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$ *qu'on voudra ; et qu'ayant mené un plan transversal représenté par* $\overline{bK}$, *et dont l'intersection avec le premier soit représentée par le point K, lequel coupe les lignes menées du point A aux points* b, c, d, e; *on trace dans chacun des quadrilatères BC*cb, *CD*dc, *BD*db, *etc. qui en résulteront, les deux diagonales* $\overline{Bc}$, $\overline{Cb}$; $\overline{Cd}$, $\overline{Dc}$, *etc. Je dis que tous les points de croisement* m, n, p *de ces diagonales, se trouveront dans un même plan, qui passera par la ligne d'intersection K des deux plans* $\overline{BK}$, $\overline{bK}$.

Démonstration. Par l'intersection K et le point de croisement *m*, j'imagine un plan, et je suppose que ce plan coupe, suivant la droite $\overline{Km}$, celui qui contient les droites $\overline{AB}$, $\overline{AC}$; il est clair, par le théorème VI, que si K′ est le point d'intersection de cette droite $\overline{Km}$ avec $\overline{Bb}$, cette dernière $\overline{Bb}$ sera coupée par les points A, K′, en segmens proportionnels. Donc, par le théorème VIII, toutes les autres droites $\overline{Cc}$, $\overline{Dd}$, $\overline{Ee}$, interceptées entre les deux plans $\overline{KB}$, $\overline{Kb}$,

seront coupées de même en segmens proportionnels par le plan $\overline{KK'}$ et le point A.

Mais, par la même raison, le plan qui passe par l'intersection K et le point n, coupe avec le point A toutes ces droites $\overline{Bb}$, $\overline{Cc}$, $\overline{Dd}$, $\overline{Ee}$, en segmens proportionnels. Ainsi des autres, comme p, etc.

Donc les plans qui passent par l'intersection K et par chacun des points m, n, p, ne sont qu'un seul et même plan. *Ce qu'il fallait prouver.*

THÉORÈME XII.

23. *Si chacune des arêtes qui partent du sommet A d'une pyramide triangulaire ABCD, on prend à volonté un point* m, n, p, *pour former le triangle* mnp *sur la surface extérieure de cette pyramide, et qu'ayant imaginé les diagonales* $\overline{Bn}$, $\overline{Cm}$, $\overline{Cp}$, $\overline{Dn}$, $\overline{Dm}$, $\overline{Bp}$, *on mène encore par le sommet A et les points de croisement D', B', C', les transversales* $\overline{Aa}$, $\overline{Aa'}$, $\overline{Aa''}$. *Je dis que,* FIG. 15.

1°. *Les transversales* $\overline{Da}$, $\overline{Ba'}$, $\overline{Ca''}$, *se croiseront toutes en un même point A' de la base.*

2°. *Les quatre transversales* $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$ *se croiseront aussi toutes en un même point K de l'espace.*

3°. *Le plan qui passera par les trois points B', C', D', et les deux autres plans BCD,* b, c, d, *auront tous trois une intersection commune.*

Démonstration. Par le théorème V, les trois triangles ABC, ACD, ABD, coupés chacun par trois transversales partant de ses angles, et se croisant en un même point D', B', C', donnent ces trois équations

$$\overline{Am} \cdot \overline{Ba} \cdot \overline{Cn} = \overline{An} \cdot \overline{Bm} \cdot \overline{Ca},$$
$$\overline{An} \cdot \overline{Ca'} \cdot \overline{Dp} = \overline{Ap} \cdot \overline{Cn} \cdot \overline{Da'},$$
$$\overline{Ap} \cdot \overline{Da''} \cdot \overline{Bm} = \overline{Am} \cdot \overline{Dp} \cdot \overline{Ba''}.$$

Multipliant toutes ces équations, et effaçant les termes qui se détruisent, on aura

$$\overline{Ba} \cdot \overline{Ca'} \cdot \overline{Da''} = \overline{Ca} \cdot \overline{Da'} \cdot \overline{Ba''};$$

équation qui, par le même théorème, prouve que les trois transversales $\overline{Da}$, $\overline{Ba'}$, $\overline{Ca''}$, se croisent toutes en un même point A'; Ce qui est la première partie de la proposition que nous avons à démontrer.

Maintenant, menons $\overline{AA'}$. Cette droite est donc tout-à-la-fois dans les trois plans ADa, ABa', ACa''. Donc, puisque $\overline{Aa}$ passe par le point de croisement D' de $\overline{Cm}$ et $\overline{Bn}$, la droite $\overline{DD'}$ sera dans le même plan qui contient $\overline{AA'}$, et par conséquent la coupera en un point. Par un semblable raisonnement, on prouvera que les quatre droites $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$, se coupent toutes deux à deux. Donc la droite $\overline{CC'}$, par exemple, qui n'est pas dans le plan ADa, où sont contenues $\overline{AA'}$, $\overline{DD'}$, les coupe cependant l'une et l'autre; ce qui ne peut avoir lieu, sans qu'elle passe par leur point de croisement. Donc les quatre droites $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$, se croisent trois à trois dans un même point : donc elles se croisent toutes quatre au même point. Ce qui est la seconde partie de la proposition que nous avons à démontrer.

Puisque le point B' est, par hypothèse, le point de croisement des droites imaginées $\overline{Cp}$, $\overline{Dn}$; si par ce point B' et le point de concours des droites $\overline{CD}$, $\overline{np}$, on conçoit une transversale, elle coupera (12) avec le point A, chacune des droites $\overline{Cn}$, $\overline{Dp}$ en segmens proportionnels. Pareillement, la transversale menée par C' et par le point de croisement des lignes imaginées $\overline{Bp}$, $\overline{Dm}$, coupera avec le point A, chacune des droites $\overline{Bm}$, $\overline{Dp}$, en segmens proportionnels. Donc le plan qui contient B', C', et le point où $\overline{Dp}$ est coupée par A et par les transversales mentionnées ci-dessus, en segmens proportionnels, passe par les points de concours des droites $\overline{CD}$ et $\overline{np}$, $\overline{BD}$ et $\overline{mp}$, et par conséquent par l'intersection com-

mune des plans BCD, *mnp*. On prouvera de même que le point D′ est contenu dans le même plan; donc le plan qui contient B′, C′, D′ et les deux autres plans BCD, *mnp*, ont la même intersection. *Ce qui restait à démontrer.*

Il est à remarquer que la même démonstration a lieu soit que les points *m*, *n*, *p* se trouvent placés sur les arêtes mêmes de la pyramide, soit qu'ils se trouvent sur le prolongement de ces arêtes au-delà des points D, C, D; alors le point K peut se trouver hors de la pyramide. Ainsi A, B, C, D, K peuvent être considérés comme cinq points quelconques pris à volonté dans l'espace, auxquels on peut appliquer, en les prenant quatre à quatre, dans un ordre quelconque, tout ce qui vient d'être dit de la pyramide ABCD.

Les points α', β', γ', où se rencontrent respectivement les côtés correspondans $\overline{BC}$ et $\overline{mn}$, $\overline{BD}$ et $\overline{mp}$, $\overline{CD}$ et $\overline{np}$ des triangles BCD, *mnp*, sont évidemment tous trois dans l'intersection de ces deux plans, et par conséquent toujours en ligne droite, quelques angles que fassent entre elles les trois arêtes $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$; donc si l'on conçoit que $\overline{AC}$ se rapproche insensiblement du plan ABD jusqu'à se trouver tracée dans ce plan même, les trois points α', β', γ' ne cesseront pas, pour cela, d'être en ligne droite; d'où suit qu'en général, si d'un point quelconque A, on mène dans un même plan trois droites quelconques $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, et qu'on fasse deux triangles BCD, *mnp*, qui aient chacun ses trois angles sur ces trois droites partant du point A, ou sur leurs prolongemens soit d'un côté, soit de l'autre, les trois points de concours α', β', γ' des côtés correspondans de ces triangles, seront toujours en ligne droite.

Par la même raison, on voit que les trois arêtes $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$; étant supposées dans un même plan, et qu'ayant mené les diagonales $\overline{Bn}$, $\overline{Cm}$, $\overline{Cp}$, $\overline{Dn}$, $\overline{Bp}$, $\overline{Dm}$; les points de croisement de ces diagonales soient D′, B′, C′; les trois droites $\overline{DD'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, devront se croiser toutes en un même point K.

Remarque.

24. La théorie des transversales droites que nous venons d'exposer, s'étend facilement aux transversales sphériques ; c'est-à-dire, que tout ce que nous avons dit des polygones plans, s'étend aux polygones formés d'arcs de grand cercle, tracés sur une sphère, en substituant les sinus de ces arcs aux côtés des polygones plans.

FIG. 17. Par exemple, si un triangle sphérique ABC est coupé par un arc de grand cercle transversal *abc* qui les rencontre tous trois, chacun des arcs AB, AC, BC, sera coupé en deux segmens, et le produit des sinus de trois de ces segmens sera égal au produit des sinus des trois autres, en les prenant de manière que ces segmens n'aient point d'extrémités communes ; c'est-à-dire, qu'on aura

$$\sin Ac \,.\, \sin Ba \,.\, \sin Cb = \sin AB \,.\, \sin Bc \,.\, \sin Ca \ldots\ldots (A)$$

En effet, par la proportionnalité des sinus des angles avec les sinus des côtés dans les triangles sphériques, les triangles A*cb*, B*ac*, C*ab*, donnent

$$\sin Ac : \sin Ab :: \sin b : \sin c;$$
$$\sin Ba : \sin Bc :: \sin c : \sin a,$$
$$\sin Cb : \sin Ca :: \sin a : \sin b.$$

Multipliant ces trois équations, et effaçant les termes qui se détruisent, on aura la formule (A) qu'il fallait démontrer.

FIG. 18. 25. Pareillement, si sur l'aire d'un triangle sphérique ABC, on prend un point D, et que par ce point on mène trois arcs de grand cercle A*a*, B*b*, C*c*, qui passent par les angles, ces arcs couperont les côtés du triangle en deux segmens chacun, et le produit de trois de ces côtés non adjacens sera égal au produit des trois autres ; c'est-à-dire, qu'on aura

$$\sin Ac \,.\, \sin Ba \,.\, \sin Cb = \sin Ab \,.\, \sin Ca \,.\, \sin Bc \ldots\ldots (B)$$

FIG. 19. 26. De même encore, si l'on a un quadrilatère sphérique ABCD, et qu'on trace ses trois diagonales AB, CD, FG, on trouvera

que chacune de ces diagonales est coupée par les deux autres en segmens, dont les sinus seront proportionnels : c'est-à-dire, par exemple, qu'en désignant par l et h les points d'intersection de la diagonale AC par les deux autres BD, GF, on aura

$$\sin Al : \sin Ah :: \sin Cl : \sin Ch \ldots\ldots\ldots\ldots (C).$$

Je ne crois pas qu'après tout ce qui a été dit sur les transversales rectilignes, il soit nécessaire d'entrer dans le détail de la démonstration de cette proposition, ni de pousser plus loin l'analogie entre la théorie de ces transversales rectilignes avec les transversales sphériques : c'est pourquoi j'abandonne ces conséquences à la sagacité du lecteur.

CONCLUSION.

27. Tels sont les principes généraux de la théorie des transversales : je me bornerai ici à indiquer quelques-unes des applications dont elle est susceptible.

Soient A, B, C, les centres de trois cercles tracés dans un même plan. Concevons qu'on mène des droites qui touchent ces cercles deux à deux extérieurement, et soient a, b, c, les points où ces tangentes coupent les lignes des centres prolongées; c'est-à-dire, que a soit le point où la ligne des centres $\overline{BC}$ est rencontrée par la tangente extérieure aux cercles B, C; ainsi des autres. Je dis que les trois points a, b, c, se trouveront nécessairement en ligne droite, ainsi que Monge l'a trouvé par des considérations purement géométriques, relatives à la Géométrie aux trois dimensions. Car si l'on nomme A, B, C, les rayons de cercles de mêmes dénominations, il est clair que les distances $\overline{Ba}$, $\overline{Ca}$, seront proportionnelles aux rayons B, C; ainsi des autres. Donc nous aurons ces trois proportions FIG. 20.

$$A : B :: \overline{Ac} : \overline{Bc},$$

$$B : C :: \overline{Ba} : \overline{Ca},$$

$$C : A :: \overline{Cb} : \overline{Ab}.$$

Multipliant ces trois proportions, et réduisant, on a

$$\overline{Ab} . \overline{Bc} . \overline{Ca} = \overline{Ac} . \overline{Ba} . \overline{Cb};$$

ce qui, en vertu du théorème I, ne peut avoir lieu, sans que les trois points a, b, c, soient en ligne droite.

Considérons maintenant les tangentes intérieures. Soient a', b', c' les points où ces tangentes coupent respectivement les lignes des centres. Nous aurons, comme ci-dessus,

$$A : B :: \overline{Ac'} : \overline{Bc'},$$
$$B : C :: \overline{Ba'} : \overline{Ca'},$$
$$C : A :: \overline{Cb'} : \overline{Ab'}.$$

Multipliant ces trois proportions, et réduisant, on a

$$\overline{Ab'} . \overline{Bc'} . \overline{Ca'} = \overline{Ac'} . \overline{Ba'} . \overline{Cb'};$$

ce qui, en vertu du théorème V, prouve que si l'on mène les trois transversales Aa', Bb', Cc', elles se croiseront toutes en un même point D.

Puisque d'une part, nous avons....... $A : B :: \overline{Ac} : \overline{Bc}$,
et de l'autre.............................. $A : B :: \overline{Ac'} : \overline{Bc'}$,
nous aurons.............................. $\overline{Ac} : \overline{Bc} :: \overline{Ac'} : \overline{Bc'}$.

Donc la droite AB est divisée en segmens proportionnels par les points c, c'; ce qui, en vertu du théorème VI, prouve que les points a', b', c, sont en ligne droite; et il en est ainsi, par la même raison, des trois points c', a' b, et c', b', a.

On peut appliquer la même théorie au cas où les trois cercles proposés se trouveraient sur la surface d'une même sphère: il suffit, pour cela, d'entendre alors des arcs de grand cercle, ce que nous venons de dire des lignes droites.

FIG. 21. 28. Soient A, B, C, D, les centres de quatre sphères. Concevons que ces sphères soient enveloppées extérieurement deux à deux par des surfaces coniques tangentes; il en résultera six cônes

différens. Or je dis que les sommets m, n, p, q, r, s, de ces six cônes, se trouveront tous dans un même plan. Car soient A, B, C, D, les rayons des quatre sphères de mêmes dénominations; nous aurons évidemment ces six proportions

$$A : B :: \overline{Am} : \overline{Bm},$$
$$B : C :: \overline{Bn} : \overline{Cn},$$
$$C : D :: \overline{Cp} : \overline{Dp},$$
$$D : A :: \overline{Dq} : \overline{Aq}.$$

Multipliant ces quatre portions, et réduisant, on aura

$$\overline{Am} . \overline{Bn} . \overline{Cp} . \overline{Dq} = \overline{Aq} . \overline{Bm} . \overline{Cn} . \overline{Dp};$$

ce qui, en vertu du théorème III, prouve que les quatre points m, n, p, q, qui terminent les segmens des côtés du quadrilatère gauche ABCD, sont dans un même plan; et la même démonstration s'applique à tous les points m, n, p, q, r, s, pris quatre à quatre. Donc tous ces points sont dans un même plan; et de plus, il sont trois à trois dans la même droite, puisqu'il est évident, par exemple, que les trois points m, n, r, sont nécessairement placés sur l'intersection du plan général dont nous venons de parler, et du plan du triangle ABC.

Considérons maintenant les points m', n', p', q', r', s', où sont placés les sommets des cônes qui envelopperaient intérieurement les sphères deux à deux.

Les quatre points A, B, C, D, pourront être considérés comme les quatre sommets d'une pyramide triangulaire; et en considérant chacune de ses bases, on aura pour le triangle ABC, par exemple,

$$\overline{Am'} . \overline{Bn'} . \overline{Cr'} = \overline{Ar'} . \overline{Bm'} . \overline{Cp'};$$

Ce qui, par le théorème VI, prouve que si l'on imagine les trois transversales $\overline{An'}$, $\overline{Br'}$, $\overline{Cm'}$, ces trois transversales se croiseront en un même point. Il en sera de même des trois autres faces de la pyramide. Donc par le théorème XII, si l'on joint chacun des sommets au point de concours des trois transversales de la base

opposée, les quatre nouvelles transversales se croiseront en un même point de l'espace.

Les droites $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, se trouvent coupées chacune en segmens proportionnels, par les points m, m'; n, n'; r, r'; d'où il suit, qu'en vertu du théorème XI, les trois points m, n, r, sont dans un même plan avec les trois points p', q', s'; ainsi des autres.

FIG. 22. 29. Soit ABC un triangle quelconque inscrit dans un cercle : par chacun des sommets je mène une tangente que je prolonge jusqu'à la rencontre des côtés opposés en a, b, c; je dis que les trois points a, b, c, sont nécessairement en ligne droite.

En effet, le triangle ABa donne $\overline{AB} : \overline{Ba} :: \sin AaB : \sin BAa$,

et le triangle ACa donne....... $\overline{Ca} : \overline{AC} :: \sin CAa : \sin AaC$.

Multipliant ces deux proportions, et observant que AaB est la même chose que AaC; que de plus, $\sin BAa = \sin C$ et $\sin CAa = \sin B$, on aura............... $\overline{AB}.\overline{Ca} : \overline{AC}.\overline{Ba} :: \sin B : \sin C$.

Pareillement, nous devons avoir.. $\overline{CA}.\overline{Bc} : \overline{CB}.\overline{Ac} :: \sin A : \sin B$,

et............................ $\overline{BC}.\overline{Ab} : \overline{BA}.\overline{Cb} :: \sin C : \sin A$.

Multipliant ces trois proportions, et effaçant les termes qui se détruisent, il viendra entre les six segmens des côtés du triangle ABC, l'équation suivante :

$$\overline{Ab}.\overline{Bc}.\overline{Ca} = \overline{Ac}.\overline{Ba}.\overline{Cb};$$

ce qui, en vertu du théorème I, ne peut avoir lieu, sans que les trois points a, b, c ne soient en ligne droite.

FIG. 23. 30. Soit le quadrilatère inscrit ABCD; je prolonge les côtés opposés $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, jusqu'à leur rencontre en m, les autres côtés opposés $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, jusqu'à leur rencontre en n, et je mène par les extrémités de l'une des diagonales, comme $\overline{AC}$, les tangentes $\overline{Ap}$, $\overline{Cp}$; je dis que les trois points m, n, p, sont en ligne droite.

En effet, considérons, par exemple, le triangle CDr, dont un côté $\overline{CD}$ passe par m, un autre $\overline{Dr}$ par n, et le troisième Cr par p.

Le triangle AmD donne....... $\overline{AD} : \overline{Dm}$ :: sin AmD : sin DAm,
et le triangle BmC. .... $\overline{Cm} : \overline{BC}$ :: sin CBm : sin BmC.
Le triangle ACp donne........ $\overline{AC} : \overline{Cp}$ :: sin ApC : sin CAp,
et le triangle Arp............ $\overline{rp} : \overline{Ar}$ :: sin rAp : sin Apr.
Le triangle CDn donne....... $\overline{Dn} : \overline{CD}$ :: sin DCn : sin DnC,
et le triangle Crn............ $\overline{Cr} : \overline{rn}$ :: sin Cnr : sin nCr.

Multipliant toutes ces proportions, et observant pour réduire, que sin AmD = sin BmC, sin ApC = sin Apr, sin Cnr = sin DnC, sin DAm = sin DCn, sin CBm = sin CAp.

Que de plus, $\overline{AD} : \overline{BC}$ :: sin rAp : sin nCr. On aura

$$\overline{AC}.\overline{Cr}.\overline{Cm}.\overline{rp}.\overline{Dn} = \overline{CD}.\overline{Ar}.\overline{Dm}.\overline{Cp}.\overline{rn} \ldots\ldots (A)$$

Mais $\overline{AC} : \overline{CD}$ :: sin ADC : sin CAD,
$\overline{Cr} : \overline{Ar}$ :: sin CAD : sin ACr.

Donc, puisque sin ACr = sin ADC, l'un de ces angles étant supplément de l'autre, on a

$$\overline{AC}.\overline{Cr} = \overline{CD}.\overline{Ar}.$$

Divisant l'équation (A) par celle-ci, il restera

$$\overline{Cm}.\overline{rp}.\overline{Dn} = \overline{Dm}.\overline{Cp}.\overline{rn} \ldots\ldots\ldots\ldots (B)$$

équation entre les segmens du triangle CDr, laquelle, en vertu du théorème I, ne peut avoir lieu, sans que les trois points m, n, p, ne soient en ligne droite; *ce qu'il fallait prouver.*

Puisque le point de concours des tangentes qui passent par les extrémités A, C de la diagonale $\overline{AC}$, se trouve sur la droite $\overline{mn}$; le point de concours des tangentes qui passent par les extrémités B, D, de l'autre diagonale $\overline{BD}$, doit, par la même raison, se trouver aussi sur cette droite $\overline{mn}$. Donc les quatre points m, n, p, q, sont tous placés sur une même ligne droite.

De plus, je dis que la droite $\overline{mn}$, comprise entre les points de concours des côtés opposés du quadrilatère inscrit, est coupée en segmens proportionnels par les points de concours p, q, des côtés opposés du quadrilatère circonscrit; et réciproquement, $\overline{pq}$ est coupée en segmens proportionnels par les points m, n; car le quadrilatère circonscrit $fghl$ a pour ses trois diagonales $\overline{fh}$, $\overline{gl}$, $\overline{pq}$. Donc (12) chacune d'elles est coupée par les deux autres en segmens proportionnels; mais par la même raison que m, n, p, q sont en ligne droite, f, k, h, n sont aussi en ligne droite, ainsi que les quatre points l, k, g, m; donc les diagonales $\overline{fh}$, $\overline{lg}$, passent respectivement par les points n, m; donc $\overline{pq}$ est réellement coupée en segmens proportionnels par ces points m, n, et réciproquement (16) $\overline{mn}$ est coupée en segmens proportionnels par les points p, q.

Par les mêmes raisons, les autres diagonales $\overline{fh}$, $\overline{gl}$ sont coupées chacune en segmens proportionnels; la première, par les points k, n, la seconde par les points k, m.

Nous pourrions conclure encore, 1° que les diagonales du quadrilatère inscrit et celles du quadrilatère circonscrit se croisent toutes quatre au même point k; 2°. que si de ce point k on abaisse une perpendiculaire sur $\overline{mn}$, cette droite passera par le centre du cercle, de même que celles qu'on mènerait du point m perpendiculairement à $\overline{fh}$, et du point n perpendiculairement à $\overline{gl}$; 3°. que le rayon du cercle est moyenne proportionnelle entre sa distance au point k et sa distance à $\overline{mn}$, etc.; mais ces détails curieux nous mèneraient trop loin. J'observerai seulement que si du point n, par exemple, on mène deux droites $\overline{ns}$, $\overline{ns'}$ aux points où la circonférence est coupée par $\overline{ml}$, ces deux droites seront nécessairement tangentes à cette circonférence, puisque ce point n est placé sur la droite $\overline{pq}$ des extrémités de laquelle partent les droites $\overline{pA}$, $\overline{pC}$; $\overline{qB}$, $\overline{qD}$, et que les cordes $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{ss'}$, se croisent toutes au même point k.

FIG. 24. 31. Soit l'hexagone ABCDEF inscrit au cercle, je prolonge les

côtés opposés $\overline{AB}$, $\overline{ED}$, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent au point m; les côtés opposés $\overline{BC}$, $\overline{EF}$, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent au point n; et les côtés opposés $\overline{CD}$, $\overline{AF}$, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent au point p; je dis que les trois points m, n, p sont en ligne droite.

En effet, je considère, par exemple, le triangle DEr, dont un des côtés $\overline{DE}$ passe par le point m, un autre $\overline{Ar}$ passe par le point n, et le troisième $\overline{Dr}$ par le point p. Je mène de plus les diagonales $\overline{FB}$, $\overline{FC}$, $\overline{FD}$, $\overline{FE}$, etc. Cela posé,

le triangle BmE donne....... $\overline{BE} : \overline{mE} :: \sin BmE : \sin mBE$,

et le triangle AmD.......... $\overline{mD} : \overline{AD} :: \sin mAD : \sin AmD$.

Le triangle BnE donne...... $\overline{nE} : \overline{BE} :: \sin nBE : \sin BnE$,

et le triangle Cnr........... $\overline{Cr} : \overline{nr} :: \sin Cnr : \sin nCr$.

Le triangle ADp donne..... $\overline{AD} : \overline{Dp} :: \sin ApD : \sin pAD$,

et le triangle Fpr........... $\overline{rp} : \overline{rF} :: \sin rFp : \sin rpF$.

Multipliant ensemble toutes ces proportions, en observant que

$$\sin BmE = \sin AmD,\ \sin BnE = \sin Cnr,\ \sin ApD = \sin rpF;$$

que de plus, $\overline{Cr} : \overline{rF} :: \sin CFr : \sin FCr$; qu'enfin, en prenant 1 pour le diamètre du cercle, nous avons

$$\sin mBE = \overline{AE},\ \sin mAD = \overline{BD},\ \sin nBE = \overline{CE},\ \sin nCr = \overline{BD},$$
$$\sin pAD = \overline{DF},\ \sin rFp = \overline{AE},\ \sin CFr = \overline{CE},\ \sin FCr = \overline{DF}.$$

Nous aurons

$$\overline{mD}\,.\,\overline{nE}\,.\,\overline{rp} = \overline{mE}\,.\,\overline{nr}\,.\,\overline{Dp};$$

équation entre les segmens des côtés du triangle DEr, laquelle ne peut avoir lieu en vertu du théorème I, sans que les trois points m, n, p ne soient en ligne droite.

Soit encore ABCDEF un hexagone inscrit au cercle; et par chacun des angles A, B, C, D, E, F, menons une tangente pour former l'hexagone circonscrit *abcdef*; je dis que les trois diagonales FIG. 25.

$\overline{ad}$, $\overline{be}$, $\overline{ef}$ de cet hexagone circonscrit, se croiseront toutes en un même point K.

En effet, je prolonge les côtés opposés $\overline{BC}$, $\overline{FE}$ de l'hexagone inscrit jusqu'à leur rencontre au point n; de ce point n, je mène des droites $\overline{ns}$, $\overline{ns'}$, aux points d'intersection de la diagonale $\overline{fc}$. Ces droites seront tangentes à la circonférence; car en prolongeant $\overline{cd}$, $\overline{fe}$ jusqu'à leur rencontre en h, et $\overline{cb}$, $\overline{fa}$ jusqu'à leur rencontre en g, on a le quadrilatère circonscrit $cgfh$; donc (30) $\overline{ns}$, $\overline{ns'}$, sont tangentes à la circonférence. On prouvera de même qu'en
FIG. 24 et 25. prolongeant $\overline{AF}$, $\overline{CD}$ jusqu'à leur rencontre en p, les droites menées de ce point p, aux points d'intersection t, t' de la diagonale $\overline{be}$ avec la circonférence, doivent être tangentes à cette circonférence; et pareillement enfin, en prolongeant $\overline{AB}$, $\overline{DE}$ jusqu'à leur rencontre au point m, les droites menées de ce point m aux points u, u' d'intersection de la diagonale $\overline{ad}$ avec la circonférence, doivent aussi être tangentes à la même circonférence.

Mais les trois points m, n, p sont en ligne droite (31); donc les trois droites $\overline{ss'}$, $\overline{tt'}$, $\overline{uu'}$ se croisent toutes en un même point. Donc, puisqu'elles se confondent respectivement pour leurs directions avec les diagonales $\overline{fc}$, $\overline{be}$, $\overline{ad}$ de l'hexagone circonscrit, ces diagonales se croisent toutes en un même point; *ce qu'il fallait démontrer*.

Cette proposition qui s'étend, ainsi que les précédentes, à toutes les sections coniques, est due à Brianchon, qui en a tiré de très-belles conséquences. (*Voyez son Mémoire dans le* 13e *cahier du Journal de l'École Polytechnique, tome VI.*)

Il est aisé de voir, d'après ce qui a été dit précédemment sur l'application de la théorie des transversales aux polygones sphériques, que tout ce qui vient d'être démontré dans cette conclusion, s'étend aux figures tracées sur la surface d'une sphère quelconque, en substituant les grands arcs de cercle aux transversales rectilignes.

Les mêmes propriétés ont lieu également pour toutes les sections coniques, ainsi qu'on l'a observé ci-dessus; et il suffit, pour s'en

convaincre, de remarquer que ces courbes peuvent toutes être considérées comme l'ombre du cercle déterminée par un point lumineux, et portée sur des plans différemment inclinés. Or une droite qui est tangente à une courbe, doit également lui rester tangente sur l'ombre de la figure ; et par l'article 14, il est évident que les droites coupées en segmens proportionnels sur la figure, doivent l'être également sur son ombre. On sent donc quel développement il est possible de donner à la théorie des transversales; mais nous avons voulu nous borner ici à en exposer les principes.

DIGRESSION

SUR LA NATURE DES QUANTITÉS DITES NÉGATIVES.

Je crois avoir donné dans ma Géométrie de position, la véritable théorie des expressions algébriques, appelées communément quantités négatives. Comme il était question alors de combattre une opinion ancienne sur la nature de ces quantités, j'ai dû entrer dans beaucoup de détails; mais plusieurs savans du premier ordre ont pensé que cet objet étant rempli, il serait maintenant utile d'écarter de la discussion tout ce qui ne serait pas entièrement élémentaire, en me bornant à l'exposé le plus simple et le plus court possible de ma théorie; c'est ce qui m'a déterminé à composer cette Digression abrégée: je l'ai jointe ici par forme de supplément, n'ayant pas en ce moment occasion de la publier avec des sujets auxquels elle soit plus analogue.

1. La nature des quantités dites négatives a toujours été le sujet d'une des principales difficultés métaphysiques de l'analyse.

Les opérations de l'Algèbre conduisent à chaque instant à des expressions de formes négatives. Que signifient ces expressions? Voilà ce qu'il faut savoir.

Il est clair d'abord que les quantités absolues sont les seules dont on puisse se former une idée nette; les signes $+$ et $-$ dont elles sont précédées, indiquent seulement les opérations qu'on doit faire sur elles. Ainsi les expressions $+a$, $-b$, sont des formes algébriques complexes, qui n'expriment ni simplement une quantité, ni simplement une opération, mais la réunion de l'une et de l'autre. On ne peut donc, sans altérer l'évidence qui doit faire

la base des vérités mathématiques, confondre ces expressions avec celles qui doivent représenter de simples quantités. Cependant $+a$ pouvant être regardé comme étant la même chose $o+a$ ou a, on peut ne faire aucune distinction entre les quantités dites positives et les quantités absolues, et la difficulté ne regarde réellement que les quantités dites négatives.

2. Il y a des personnes qui regardent les quantités négatives isolées comme moindres que o; mais cette opinion ne paraît nullement soutenable; car pour obtenir une pareille quantité, il faudrait pouvoir ôter quelque chose de rien, ce qui est absurde.

De plus, comment admettre que le produit de deux facteurs donnés puisse être moindre que celui de deux autres facteurs donnés, plus petits que les premiers, chacun à chacun? C'est cependant ce qui arriverait en multipliant, par exemple, -4 par -5, s'il était vrai que -4 et -5 fussent chacune moindre que o; puisque leur produit 20 serait plus grand que celui de ces deux autres facteurs 2, 3, chacun plus grand que o, et dont le produit n'est que 6.

Enfin, puisqu'on est en droit de négliger dans un calcul les quantités nulles, à plus forte raison devrait-on pouvoir négliger celles qui sont moindres que rien: or tout le monde sait qu'on commettrait des erreurs capitales, si on négligeait les quantités négatives.

3. D'autres personnes disent que les quantités négatives isolées ne diffèrent des quantités positives, qu'en ce qu'elles sont prises dans un sens contraire.

Mais d'abord, ces personnes n'expliquent point ce qu'elles entendent en général par quantités prises en sens contraire les unes des autres. Elles disent bien, par exemple, qu'une créance et une dette sont deux quantités prises en sens contraire l'une de l'autre, et qu'ainsi une dette peut être dite une créance négative. Elles disent qu'une ordonnée prise à droite de l'axe des abscisses et une ordonnée prise à gauche, sont deux quantités prises en sens contraire l'une de l'autre, et qu'ainsi une ordonnée à gauche peut être considérée comme une ordonnée à droite prise négativement. Mais indépendamment de l'obscurité attachée à de pareilles expressions, ce ne sont là que des exemples particuliers,

qui n'expliquent point ce qu'on doit entendre généralement par deux quantités prises en sens contraire l'une de l'autre.

De plus, les règles que l'on établit sur cette notion vague se trouvent sans cesse en défaut, même dans les cas particuliers dont nous venons de parler. Je me bornerai ici à un seul exemple, celui de la sécante d'un arc plus grand que la demi-circonférence, et moindre que les trois quarts. Cette sécante, d'après les règles dont nous venons de parler, devrait être positive, puisqu'elle se confond, tant pour sa grandeur que pour sa direction, avec la sécante d'un arc moindre que le quart de circonférence, que tout le monde reconnaît pour positive. Or il est constant, dans la théorie même de ceux qui soutiennent l'opinion dont il s'agit, que cette sécante d'un arc plus grand que la demi-circonférence, et moindre que les trois quarts, doit être négative. C'est donc une contradiction manifeste, et cette opinion est aussi inadmissible que la première.

D'ailleurs, si les quantités dites négatives étaient de véritables quantités, pourquoi, lorsqu'on multiplie les unes par les autres, les négatives auraient-elles le privilége de donner leur signe au produit? Pourquoi ne pourrait-on tirer la racine carrée des unes aussi bien que des autres? La racine carrée d'une créance serait une quantité réelle, et la racine carrée d'une dette serait une quantité absurde : la racine carrée d'une ordonnée prise à droite de l'axe serait réelle, et celle de l'ordonnée à gauche serait imaginaire; et qui plus est, comme on est maître de fixer le côté des ordonnées positives, on pourrait rendre à volonté possible et impossible une même chose; on pourrait, par la magie des signes, donner l'existence à ce qui ne peut pas être, et rendre impossible ce qui existe : certes, les géomètres ne se sont jamais douté qu'ils eussent en main un pareil pouvoir.

4. D'autres personnes enfin, sans discuter la nature des quantités négatives isolées, se sont attachées à justifier l'emploi qu'on en fait, en montrant que les résultats qu'on obtient par elles, sont toujours conformes à ceux qu'on obtient par la seule synthèse, ou par d'autres procédés de calcul qui dispensent de faire usage de ces quantités négatives. On doit regarder leur travail comme d'autant plus

précieux, qu'il n'est pas d'autre manière de constater l'infaillibilité des résultats fournis par l'analyse. Mais ce que je me propose ici est différent ; mon but n'étant pas de rechercher comment on pourrait se passer de l'emploi des quantités dites négatives, mais de savoir en quoi consiste la nature de ces mêmes quantités, lorsqu'on en fait usage. Tel est l'objet des remarques suivantes.

5. L'expression de *quantité négative* se prend en Algèbre dans deux acceptions très-différentes.

Suivant la première acception, *quantité négative* signifie simplement toute quantité qui est affectée du signe —.

Suivant la seconde, *quantité négative* signifie toute quantité qui se trouve affectée du signe contraire à celui qu'elle devrait avoir.

Par exemple, dans la formule connue

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \ldots\ldots\ldots (A)$$

le dernier terme est négatif suivant la première acception. Tant que a, b et $a+b$ sont moindres chacun que le quart de circonférence, ce même terme reste au contraire positif, suivant la seconde acception, parceque le signe — dont il est affecté, est le vrai signe qu'il doit avoir en effet, pour que l'équation soit exacte. Mais si l'angle $a+b$, par exemple, devient plus grand que le quart de circonférence, la formule sera pour lors fautive; car en cherchant directement par synthèse, la formule qui convient à ce nouveau cas, on trouve

$$\cos(a+b) = \sin a \sin b - \cos a \cos b \ldots\ldots\ldots (B)$$

Donc si l'on veut regarder la première formule comme applicable encore à ce cas-ci, il faudra y considérer le premier terme $\cos(a+b)$, comme portant un signe contraire à celui qu'il devrait avoir; puisqu'en effet en changeant le signe de ce terme, on a, $-\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, formule qui en transposant les termes, revient à la formule (B) qui est la véritable pour le cas présent. Ainsi, en considérant cette première formule (A) comme applicable au cas où $a+b$ est plus grand que le quart de circonférence, $\cos(a+b)$ y est affecté du signe

contraire à celui qu'il devrait avoir, et se trouve parconséquent une *quantité négative* suivant la seconde acception, quoiqu'elle soit positive suivant la première.

On voit par là que ces deux classes de quantités diffèrent essentiellement l'une de l'autre; puisqu'une même quantité peut se trouver positive suivant la première acception, et négative selon l'autre; ou négative selon la première, et positive selon la seconde: qu'une simple transposition rend positive celle qui était négative suivant la première acception, tandis que suivant la seconde, elle restera toujours négative malgré la transposition, parcequ'elle ne cessera pas pour cela d'être affectée du signe contraire à celui qu'elle devrait avoir. Il n'est donc pas étonnant qu'une même expression appliquée indistinctement à deux choses si différentes, répande l'obscurité sur le sujet dont il s'agit.

6. Pour éviter cet inconvénient, réservons l'expression de *quantités négatives* à celles qui sont en effet réellement affectées du signe —; et celles qui se trouvent affectées d'un signe contraire à celui qu'elles devraient avoir, nommons-les *quantités inverses* par opposition à celles dont le signe est tel qu'il doit être, et que nous nommerons *quantités directes*.

On dit, par exemple, qu'une dette est une créance négative: cela signifie que si dans un calcul, on prend une dette pour une créance, ou une créance pour une dette, la quantité algébrique qu'on aura prise pour représenter la somme à payer ou à recevoir, se trouvera affectée du signe contraire à celui qu'elle devrait avoir, et qu'elle aurait eu réellement si l'on ne s'était pas trompé.

En effet, soit x cette quantité à payer ou à recevoir par une certaine personne, A la fortune de cette personne, B ce qu'elle posséderait, abstraction faite de sa dette ou de sa créance x.

Si cette somme x est une créance, il est clair qu'on aura

$$A = B + x, \quad \text{ou} \quad x = A - B;$$

si au contraire x est une dette, on aura

$$A = B - x, \quad \text{ou} \quad x = B - A;$$

donc si l'on a supposé par erreur que x étoit une créance, tandis

que c'était une dette, ou une dette tandis que c'était une créance, on aura mis dans le calcul $A - B$ au lieu de $B - A$, ou $A - B$ au lieu de $-(A - B)$, ou x au lieu de $-x$; c'est-à-dire, que dans tout le cours du calcul, x se trouvera affectée du signe contraire à celui qu'elle devrait avoir, et qu'elle aurait réellement si elle représentait ce qu'elle doit représenter en effet.

7. De même, si dans un calcul d'application d'Algèbre à la Géométrie, on suppose par erreur que telle ordonnée est placée à la droite de l'axe des abscisses, tandis qu'elle est réellement placée à la gauche, le signe dont se trouvera affectée la lettre alphabétique prise pour représenter cette ordonnée, sera contraire à celui qu'elle devrait avoir, et qu'elle aurait réellement si l'on ne s'était pas trompé sur la position de cette ordonnée; ainsi cette lettre alphabétique exprimera une quantité inverse.

En effet, soit $\overline{BB'}$ l'axe des abscisses, $\overline{pM}$ l'ordonnée qui est à gauche, tandis qu'on l'avait jugée à droite en $\overline{pm'}$. Menons au-delà du point M un nouvel axe $\overline{FF'}$ parallèle au premier qui soit rencontré en p' par l'ordonnée, et nommons a la distance arbitraire de ces deux axes, y l'ordonnée dont il s'agit, et z la distance de son extrémité, M ou M' un nouvel axe.

Si l'ordonnée est réellement $\overline{M'p}$, on aura

$$\overline{M'p} = \overline{M'p'} - \overline{pp'}, \text{ ou } y = z - a.$$

Si au contraire l'ordonnée est $\overline{Mp}$, on aura

$$\overline{Mp} = \overline{p'p} - \overline{p'M}, \text{ ou } y = a - z.$$

Donc si l'on a supposé, par erreur ou autrement, que l'ordonnée était à droite, c'est-à-dire $\overline{M'p}$, tandis qu'elle était réellement à gauche, c'est-à-dire $\overline{Mp}$, on aura mis dans le calcul $\overline{M'p}$ au lieu de $\overline{Mp}$, ou $z - a$ au lieu de $a - z$, ou $z - a$ au lieu de $-(z - a)$, c'est-à-dire qu'on aura donné à y un signe contraire à celui qu'elle devait avoir; donc cette quantité y sera de celles que j'ai nommées *quantités inverses*.

8. On peut voir par là que le principe fondamental de toute la théorie des quantités inverses, est celui-ci : *Toute quantité inverse peut être considérée comme la différence de deux quantités directes dont la plus grande a été prise pour la plus petite, et réciproquement.*

En effet, dans le premier exemple ci-dessus, x est inverse et porte le signe contraire à celui qu'elle devrait avoir, puisqu'on l'a supposé $A-B$, tandis qu'il est réellement $B-A$; c'est-à-dire, que des deux quantités, A, B, dont x est la différence, A a été supposée la plus grande, tandis qu'elle se trouve en effet la plus petite.

De même, dans le second exemple, y est inverse, et porte le signe contraire à celui qu'il devrait avoir, parcequ'on l'a supposé $z-a$, tandis qu'il est réellement $a-z$; c'est-à-dire, que des deux quantités a, z, dont y est la différence, la plus grande a été prise pour la moindre.

En général, soit p une quantité inverse quelconque, et faisons $p=m-n$. Puisque p est inverse par hypothèse, il est affecté du signe contraire à celui qu'il devrait avoir; c'est-à-dire, qu'on a mis dans le calcul p au lieu de $-p$, ou $m-n$ au lieu de $n-m$: on a donc supposé $m>n$, tandis que réellement on a $n<m$; c'est-à-dire que des deux quantités m, n, dont p est la différence, la plus grande n a été prise pour la plus petite, et la petite m a été prise pour la plus grande.

9. C'est dans ce sens qu'on doit entendre ce principe connu et important; savoir, que toute quantité variable qui, de positive qu'elle était, devient négative et réciproquement, passe nécessairement par o ou par ∞. Cela signifie que toute quantité variable qui de directe devient inverse, ou qui d'inverse redevient directe, passe nécessairement par o ou par ∞. En effet, pour que des deux quantités m, n, la plus grande devienne la plus petite, il faut qu'elles passent l'une et l'autre par l'état d'égalité, et que par conséquent leur différence $m-n$ ou $n-m$ devienne o. Donc, puisque p est cette différence, il faut aussi qu'elle passe par o pour devenir inverse ou $-p$. Mais si p devient $-p$, $\frac{1}{p}$ deviendra aussi $\frac{1}{-p}$; donc $\frac{1}{-p}$ deviendra aussi inverse; donc en devenant inverse, elle passera

par ∞. Appliquons toute cette théorie à quelques nouveaux exemples.

10. Le cosinus d'un angle obtus est une *quantité inverse*, ou négative suivant la seconde acception dont nous avons parlé; parce que le système primitif, celui auquel on le rapporte, et sur lequel les raisonnemens ont été établis, est celui dans lequel tous les angles considérés, sont moindres que le quart de circonférence, ce qui, suppose le cosinus même égal au rayon moins le sinus verse, et par conséquent le rayon plus grand que le sinus verse; mais lorsque l'angle est obtus, c'est au contraire le sinus verse qui est plus grand que le rayon. Donc alors le cosinus est la différence de deux autres quantités dont la plus grande a été supposée la plus petite. Donc le cosinus de l'angle obtus est ce que j'ai appelé une quantité inverse.

Voilà pourquoi, en prenant la formule primitive $\cos = 1 - \sin\text{ver}$, il faut y changer le signe dont cos est affecté, pour que cette formule lui devienne applicable : c'est-à-dire, écrire $-\cos = 1 - \sin\text{ver}$, ou $\cos = \sin\text{ver} - 1$, qui est la vraie formule convenable au cas dont il s'agit. De même, ainsi qu'on l'a vu plus haut, a et b étant deux angles dont la somme $a + b$ est moindre que le quart de circonférence ; on a $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$. Mais si $a+b$ surpasse le quart de circonférence, $\cos(a+b)$ deviendra inverse, puisqu'elle est la différence de deux quantités, 1 et $\sin\text{ver}(a+b)$, dont la première a été prise pour la plus grande dans la formule primitive, tandis qu'elle est la plus petite dans le cas présent. $\text{Cos}(a+b)$ se trouve donc affectée du signe contraire à celui qu'elle devrait avoir; c'est-à-dire, que la véritable formule, pour le cas présent, est

$$-\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

ou

$$\cos(a+b) = \sin a \sin b - \cos a \cos b.$$

Et l'on doit remarquer que, conformément à ce qui a été dit ci-dessus, au moment où $\cos(a+b)$ change ainsi de signe ou devient inverse, elle passe évidemment par 0.

De même, on a par les formules primitives, $\text{tang}\, a = \frac{\sin a}{\cos a}$,

$$\text{ou tang}\, a = \frac{\sin a}{1 - \sin\text{ver}\, a} = \frac{\sin a(1 - \sin\text{ver}\, a)}{(1 - \sin\text{ver}\, a)^2} = \frac{\sin a - \sin a . \sin\text{ver}\, a}{1 - 2\sin\text{ver}\, a + \sin\text{ver}^2 a},$$

$$\text{ou tang}\, a = \frac{\sin a}{1 - 2\sin\text{ver}\, a + \sin\text{ver}^2 a} - \frac{\sin a . \sin\text{ver}\, a}{1 - 2\sin\text{ver}\, a + \sin\text{ver}^2 a}.$$

Cela posé, tant que a sera moindre que le quart de circonférence, 1 sera plus grand que sin ver a, et par conséquent, le premier terme du second membre sera plus grand que l'autre : donc tang a restera constamment directe. Mais si a devient obtus, alors on aura sin vers $a > 1$. Donc tang a se trouvera la différence de deux quantités, dont la plus grande a été supposée la plus petite; donc tang a deviendra inverse, ou négative suivant la seconde acception dont nous avons parlé; c'est-à-dire, que la véritable formule pour ce cas, est tang $a = \frac{\sin a\,(\sin \text{ver}\, a - 1)}{(\sin \text{ver}\, a - 1)^2}$. Cela n'empêche pas que l'on ait toujours tang $a = \frac{\sin a}{\cos a}$, parce que dans cette équation, tang a et cos a deviennent l'une et l'autre inverses à-la-fois, de manière que pour y appliquer la formule, il faut changer le signe de l'une et de l'autre, ce qui donne

$$-\text{tang}\, a = \frac{\sin a}{-\cos a}, \text{ ou } \text{tang}\, a = \frac{\sin a}{\cos a};$$

et l'on doit remarquer, qu'au moment où tang a change de signe, elle passe par ∞, puisqu'elle est toujours $\frac{\sin a}{\cos a}$, et que cos a passe par 0, comme on l'a vu ci-dessus.

Pareillement encore, on a dans le système primitif,

$$\text{séc}\, a = \frac{1}{\cos a} = \frac{1}{1 - \sin \text{ver}\, a} = \frac{1 - \sin \text{ver}\, a}{(1 - \sin \text{ver}\, a)^2} = \frac{1}{(1 - \sin \text{ver}\, a)^2} - \frac{\sin \text{ver}\, a}{(1 - \sin \text{ver}\, a)^2}.$$

Or tant que a sera moindre que le quart de circonférence, le premier terme du second membre sera plus grand que l'autre, et la formule aura lieu sans modification : mais si a devient plus grand d'une demi-circonférence, sin ver a sera plus grand que 1; donc séc a se trouvera être la différence de deux quantités dont la plus petite aura été prise pour la plus grande; donc elle sera inverse, donc elle portera un signe contraire à celui qu'elle devrait avoir. Donc la vraie formule, dans ce cas, sera

$$\text{séc}\, a = \frac{\sin \text{ver}\, a}{(\sin \text{ver}\, a - 1)^2} - \frac{1}{(\sin \text{ver}\, a - 1)^2};$$

ce qui n'empêche pas qu'on ait toujours séc $a = \frac{1}{\cos a}$, parcequ'alors

séc a et cos a deviennent l'une et l'autre inverses en même temps.

Il est à remarquer, comme on l'a déjà dit, que cet exemple, si facile à expliquer dans notre théorie, détruit entièrement l'opinion de ceux qui disent que les quantités négatives ne sont autre chose que des quantités ordinaires, prises en sens opposé à celles qu'on nomme positives.

11. Mais on peut demander à quoi bon introduire dans le calcul, des quantités affectées d'un faux signe, et s'il ne serait pas plus simple de donner tout de suite à chacune d'elles le signe qui lui convient.

Je réponds d'abord, qu'on y est souvent obligé; car si l'on cherche, par exemple, l'ordonnée d'une courbe, sans savoir la région dans laquelle elle se trouve; il faut bien commencer par supposer qu'elle se trouve dans telle ou telle région; et si l'on se trompe dans cette hypothèse, on trouve bien la valeur absolue de l'ordonnée en question, mais (7) affectée du signe contraire à celui qu'elle devrait avoir. Il y a par conséquent erreur dans le résultat; mais cette erreur est facile à corriger, sans qu'il soit nécessaire de recommencer le calcul, puisqu'il n'y a qu'à prendre cette ordonnée dans la région opposée à celle où l'on avait jugé qu'elle devait se trouver.

De même, si l'on cherche le cosinus d'un angle qu'on croit être aigu, et que cependant on trouve pour ce cosinus une valeur négative, c'est une preuve qu'on s'est trompé sur le côté du centre où on l'a supposé placé (10), et que l'angle est obtus; mais comme on n'en a pas moins trouvé la valeur absolue de son cosinus, on en conclut que l'angle cherché est le supplément de celui qu'on avait cru devoir remplir les conditions du problème.

12. Il arrive souvent ainsi que, quoiqu'on se soit trompé dans la mise en équation, la solution n'en est pas moins utile, parceque l'erreur est facile à rectifier, sans qu'il soit besoin de recommencer le calcul; mais souvent aussi, on est obligé de le refaire sur de nouvelles hypothèses; car on ne peut se flatter d'avoir obtenu une véritable solution, que lorsqu'on est parvenu à trouver pour l'inconnue une valeur positive, puisqu'il n'y a en effet que les valeurs positives qui soient véritablement intelligibles, et que toutes les autres annoncent nécessairement une incompatibilité

entre les conditions données et les hypothèses sur lesquelles on a établi le raisonnement. Il faut donc changer ces hypothèses ou modifier les conditions du problème jusqu'à ce qu'on ait une valeur positive pour l'inconnue. Si l'équation a plusieurs racines, les unes positives, les autres négatives, il n'y a jamais que les premières qui puissent être prises pour de véritables solutions. Il faut appliquer à chacune des autres en particulier, ce qu'on a dit de la valeur négative de la racine lorsqu'elle est seule. Quelquefois même il arrive que ces racines sont absolument insignifiantes, et ne peuvent être considérées que comme de simples formes algébriques, qui ont été introduites dans le calcul par les transformations auxquelles l'équation s'est trouvée soumise dans le cours des opérations.

13. Nous venons de voir qu'on est souvent obligé d'employer dans le calcul, des quantités affectées du signe contraire à celui qu'elles devraient avoir; quantités que nous avons nommées inverses: mais il est un autre motif qui déterminerait à les employer, quand même on n'y serait pas obligé; c'est l'avantage qu'elles procurent de pouvoir représenter par une seule et même formule, un système variable de quantités, dans tous les états où il peut se trouver. Ainsi, par exemple, sans ce moyen il faudrait quatre équations différentes pour représenter les quatre régions d'une courbe plane divisée par ses deux axes, et il en faudrait huit pour représenter une surface courbe; au lieu qu'en admettant les quantités inverses, la même équation sert pour les huit régions, en se réservant de changer à la fin du calcul le signe des quantités inverses ou affectées d'un faux signe, qui pourraient se trouver encore dans le résultat. Ainsi, par exemple, quoique les formules

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a;$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

ne soient exactes que pour le premier quart de la circonférence; on les regarde comme applicables à tous les cas possibles; sauf à changer, suivant l'exigence des cas à la fin du calcul, le signe des cosinus des angles plus grands que le quart de circonférence ou plutôt, c'est par les signes mêmes dont les termes se trouvent affectés à la fin du calcul, qu'on juge si les angles appartiennent

comme on l'avait supposé, ou s'ils n'appartiennent pas au premier quart de la circonférence.

14. Tout ce que j'ai dit jusqu'à présent ne regarde encore que les quantités inverses faussement appelées quantités négatives, puisque cette expression ne peut naturellement convenir qu'à celles qui sont réellement affectées du signe —, tandis que les quantités inverses se trouvent tantôt affectées du signe + et tantôt du signe —.

Les quantités négatives proprement dites, dont il reste à parler, ne donnent lieu à aucune difficulté, lorsqu'elles sont précédées de quantités positives plus grandes qu'elles; mais lorsque par l'effet d'une transposition, ou d'une autre transformation quelconque algébrique, on arrive à une quantité négative de cette espèce, isolée ou précédée d'une quantité positive moindre qu'elle, ou en général à une phrase algébrique qui indique des opérations inexécutables, on doit regarder cette phrase comme une simple forme qui n'a aucune signification réelle par elle-même, mais qui renferme néanmoins implicitement les rapports cherchés entre les quantités qui y entrent. Ce qu'il y a d'absurde ou d'inintelligible dans une pareille expression, étant censé amené par une transformation, doit disparaître par d'autres transformations; et c'est seulement lorsqu'on l'aura ramenée à une forme explicite, c'est-à-dire où toutes les opérations indiquées se trouveront possibles, que l'on pourra faire des applications utiles de cette formule; jusque-là, on doit la regarder comme mise transitoirement sous une forme non significative, dans la seule vue de faciliter et d'abréger les opérations du calcul. C'est par la synthèse seule qu'on démontre les règles des signes en algèbre, c'est-à-dire, qu'on ne saurait les établir autrement que sur des expressions significatives; on ne prouve pas que $+a \times -b = -ab$, mais on prouve que $+a \times (B - b)$ est $aB - ab$, en supposant $B > b$; c'est ensuite par pure analogie, qu'en supposant $B < b$, ou même $B = 0$, on en conclut que $+a \times -b = -ab$, et qu'on étend ainsi cette règle algébrique à toute fonction significative ou non.

Les quantités simplement négatives doivent à cet égard être considérées comme les quantités imaginaires elles-mêmes; c'est-à-dire, comme de simples formes algébriques, les dernières n'étant que les racines carrées des premières : si celles-ci étaient possibles,

il n'y aurait aucune raison pour que les autres ne le fussent pas, car toute quantité effective doit avoir sa racine carrée; et si elle n'en a pas, c'est une preuve qu'elle est elle-même une quantité absurde : les unes et les autres ne diffèrent, à proprement parler, que par leurs différens degrés d'absurdité.

15. Voilà pourquoi c'est un travail important que celui des savans, qui se sont attachés à montrer que les résultats auxquels on est conduit par l'emploi de ces formes insignifiantes en elles-mêmes, ne diffèrent jamais de ceux qu'on obtient par d'autres tournures de calcul qui n'exigent pas qu'on s'en serve. Mais loin d'en conclure, qu'il faut rejeter les méthodes analytiques où l'on en fait usage; on prouve, par cette conformité même de résultats, l'avantage de ces méthodes, qui sont en général beaucoup plus courtes et plus faciles que celles qu'on pourrait leur substituer.

C'est même, à proprement parler, dans la faculté qu'on a d'employer en analyse ces formes négatives et imaginaires, que consiste le véritable caractère de cette science, et son avantage sur la synthèse qui n'a pas la même faculté : celle-ci est restreinte par la nature de ses procédés, elle ne peut jamais perdre de vue son objet ; il faut que cet objet s'offre toujours à l'esprit réel et net, ainsi que tous les rapprochemens et toutes les combinaisons qu'on en fait. Elle ne peut donc employer des quantités absurdes, raisonner sur des opérations non exécutables. Si elle fait usage de signes, c'est seulement pour aider l'imagination et la mémoire ; mais ces signes ne peuvent jamais être pour elle que de simples abréviations.

L'analyse au contraire a d'abord tous les moyens de la synthèse ; et de plus, elle admet dans ses combinaisons des objets qui n'existent pas; elle les représente par des symboles, aussi bien que ce qui est effectif : elle mélange les êtres réels avec les êtres de raison; puis, par des transformations méthodiques, elle parvient à éliminer ou chasser ces derniers du calcul, après s'en être servi comme d'auxiliaires. Alors ce qu'il y avait d'inintelligible disparaît, et il ne reste que ce qu'une synthèse subtile aurait sans doute pu faire découvrir : mais ce résultat, on l'a obtenu par une voie plus courte, plus facile, et presque par pur mécanisme, lorsqu'il eût fallu de grands efforts pour y parvenir autrement. Tel est l'avantage de

l'analyse sur la synthèse, et toute autre distinction entre l'une et l'autre paraît absolument illusoire.

Par la synthèse, dit-on, on cherche à passer du connu à l'inconnu; au lieu que dans l'analyse on regarde comme connu ce qui ne l'est pas. Cela veut dire qu'en synthèse on cherche à exprimer tout de suite les inconnues en valeurs des données; et qu'en analyse au contraire, on commence souvent par exprimer les données en valeurs des inconnues, pour revenir ensuite à l'expression de celles-ci en valeurs des autres, à l'aide de transformations algébriques.

16. Mais cette distinction adoptée assez généralement sans qu'on l'ait approfondie, n'a rien de réel : il n'y a qu'à ouvrir tous les ouvrages d'une synthèse délicate, et l'on verra que le procédé qu'on attribue ici exclusivement à l'analyse, est également celui de la synthèse; que dans l'une aussi bien que dans l'autre, on raisonne sur les quantités inconnues comme si elles étaient données, et que la vraie, la seule différence consiste, non en ce que l'une emploie des signes algébriques, et l'autre non, car l'une et l'autre en font usage, mais uniquement dans la nature des transformations algébriques qui suivent la mise en équation; cette mise en équation appartenant elle-même exclusivement à la synthèse. Mais celle-ci ne peut se permettre, sans manquer à son essence, une transformation qui laisserait quelque quantité négative isolée dans un membre, ou qui indiquerait une opération non exécutable; tandis que ces sortes de transformations sont très-familières à l'analyse, et sont pour elle une source féconde de découvertes, auxquelles la synthèse ne peut arriver que par des moyens longs et pénibles.

17. De tout ce qui vient d'être dit, je conclus,

1°. Qu'il n'existe de véritables quantités que celles qu'on nomme *quantités absolues*, auxquelles cependant on peut assimiler celles qu'on nomme *quantités positives*.

2°. Que l'expression de *quantités négatives* est prise par les algébristes dans deux acceptions essentiellement différentes, dont l'une s'applique aux quantités affectées du signe —, et l'autre aux quantités affectées du signe contraire à celui qu'elles devraient avoir.

3°. Que pour éviter l'amphibologie et l'obscurité qui peuvent résulter de cette double acception, il convient d'employer deux dénominations différentes, pour désigner ce qu'on appelle ordinairement *quantités négatives*, en réservant l'expression de *quantités négatives proprement dites*, aux quantités affectées du signe —, et en nommant, par exemple, *quantités inverses* celles qui se trouvent affectées du signe contraire à celui qu'elles devraient avoir.

4°. Que les *quantités négatives proprement dites* isolées, sont des êtres aussi absurdes que les quantités imaginaires elles-mêmes, qui ne sont autre chose que les racines carrées des premières; que les unes et les autres sont de pures formes algébriques qu'on emploie dans le calcul par simple analogie, comme si c'étaient de véritables quantités.

5°. Que le calcul ne devient significatif que lorsque par la suite des transformations opérées, on est parvenu à un résultat explicite, c'est-à-dire dans lequel toutes les quantités qui y entrent sont des quantités absolues, et où les signes n'indiquent plus aucune opération qui ne soit exécutable.

6°. Que c'est cet emploi des quantités négatives et imaginaires dans le calcul, qui constitue proprement ce qu'on nomme analyse, qui la distingue essentiellement de ce qu'on nomme synthèse, et qui seule donne à la première un si grand avantage sur l'autre.

7°. Que les quantités appelées ci-dessus inverses, annoncent toujours dans le calcul une erreur commise et une incompatibilité entre les conditions du problème et les hypothèses qu'on a faites pour la mise en équation.

8°. Que pour rectifier cette erreur, il faut nécessairement apporter quelques modifications, soit aux conditions, soit aux hypothèses, jusqu'à ce qu'il ne se trouve plus aucune contradiction entre elles ni par conséquent aucunes quantités inverses dans le résultat du calcul.

9°. Que pour opérer ces modifications, on peut attendre le résultat du calcul, parcequ'alors il arrive souvent que ces modifications s'y trouvent indiquées d'une manière assez simple, pour qu'on soit dispensé de recommencer le calcul.

10°. Que toute quantité inverse est la différence de deux autres quantités directes et dont la plus grande a été supposée la plus petite dans la mise en équation, et réciproquement.

11°. Que c'est dans cette dernière acception seulement, et non dans celles des quantités négatives proprement dites, qu'il faut entendre ce principe connu, que toute quantité qui de positive devient négative ou réciproquement, passe nécessairement par o ou par ∞.

12°. Qu'enfin cette distinction des quantités appelées communément négatives en *quantités négatives proprement dites* et *quantités inverses*, ne change rien aux procédés ordinaires du calcul, mais qu'elle fait simplement disparaître les contradictions et l'obscurité, qui résultent nécessairement de l'application d'une même dénomination à denx choses essentiellement différentes.

FIN.

Corrections et Observations.

Page 9, *avant le problème III.* On a omis ici un problème qui y trouvait naturellement sa place ; c'est celui-ci : *Les six arêtes d'une pyramide triangulaire étant données, trouver la valeur d'une droite menée de son sommet à l'un quelconque des points de sa base supposé donné.* Je me contenterai d'indiquer ici la solution.

Puisque le point de la base est donné, on connaît sa distance à deux quelconques des angles de cette base ; et parconséquent, les sommets de ces deux angles, celui de la pyramide et le point donné, sont les quatre sommets d'une pyramide triangulaire, dont on connaît cinq arêtes, le sixième étant la droite cherchée. Cela posé, par le problème II, on a l'expression de la hauteur de cette pyramide en valeurs de ces six arêtes. Égalant donc cette hauteur à celle de la pyramide proposée, on aura une équation qui ne renfermera plus que les huit données, et l'inconnue qui est la distance cherchée.

Pages 13, *lignes* 2 *et* 3 : il faut transporter à la fin de la ligne 2 le crochet de parenthèse qui est à la fin de la ligne 3.

Page 17, *ligne* 18 : au lieu du signe + qui sépare les deux termes de la formule, *mettez* le signe =.

Page 18, *lignes* 20 *et* 22 : au lieu de $\overline{AB}$, *mettez* $\overline{BA}$.

Page 19, *ligne* 11, *effacez le mot* cherché.

Page 47, *à la fin*, on a omis d'ajouter que la formule, quoique du quatrième degré, peut toujours se résoudre comme celles du second ; attendu que les puissances impaires de l'inconnue ne s'y trouvent pas.

Page 80, *ligne* 9 : *au lieu de* points, *lisez* plans.

Page 83, *ligne* 10 : *après* si, *lisez* sur.

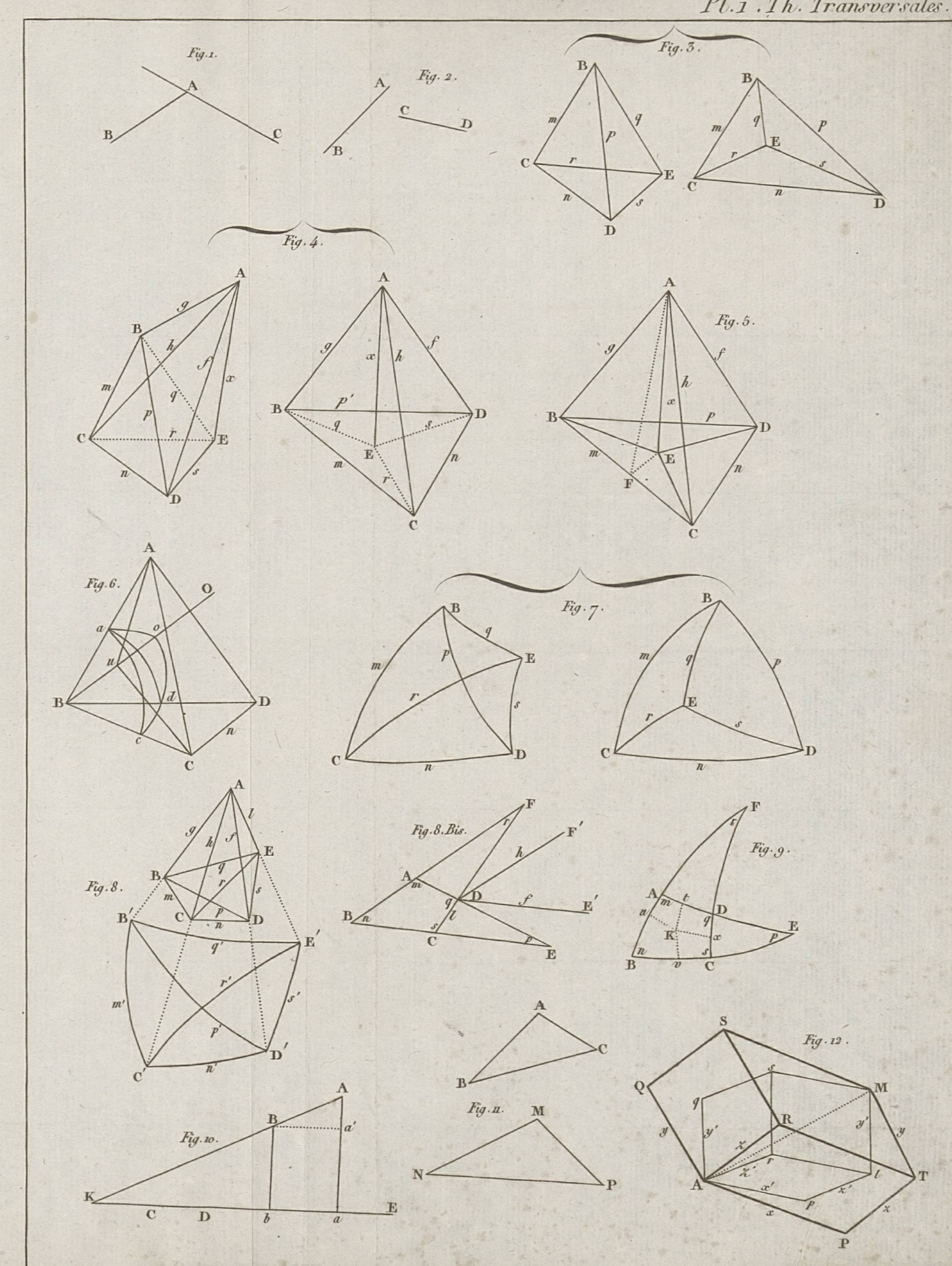
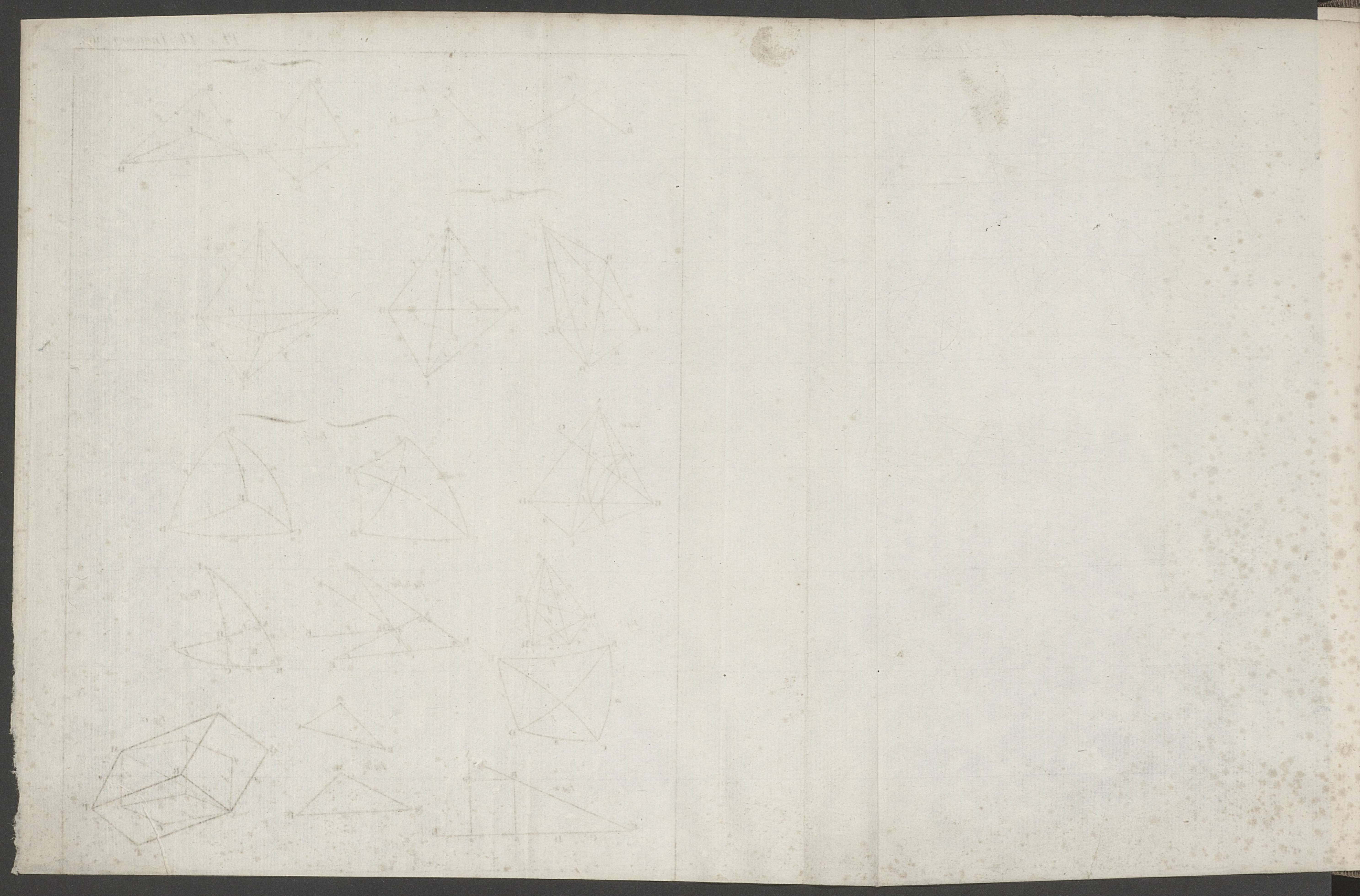
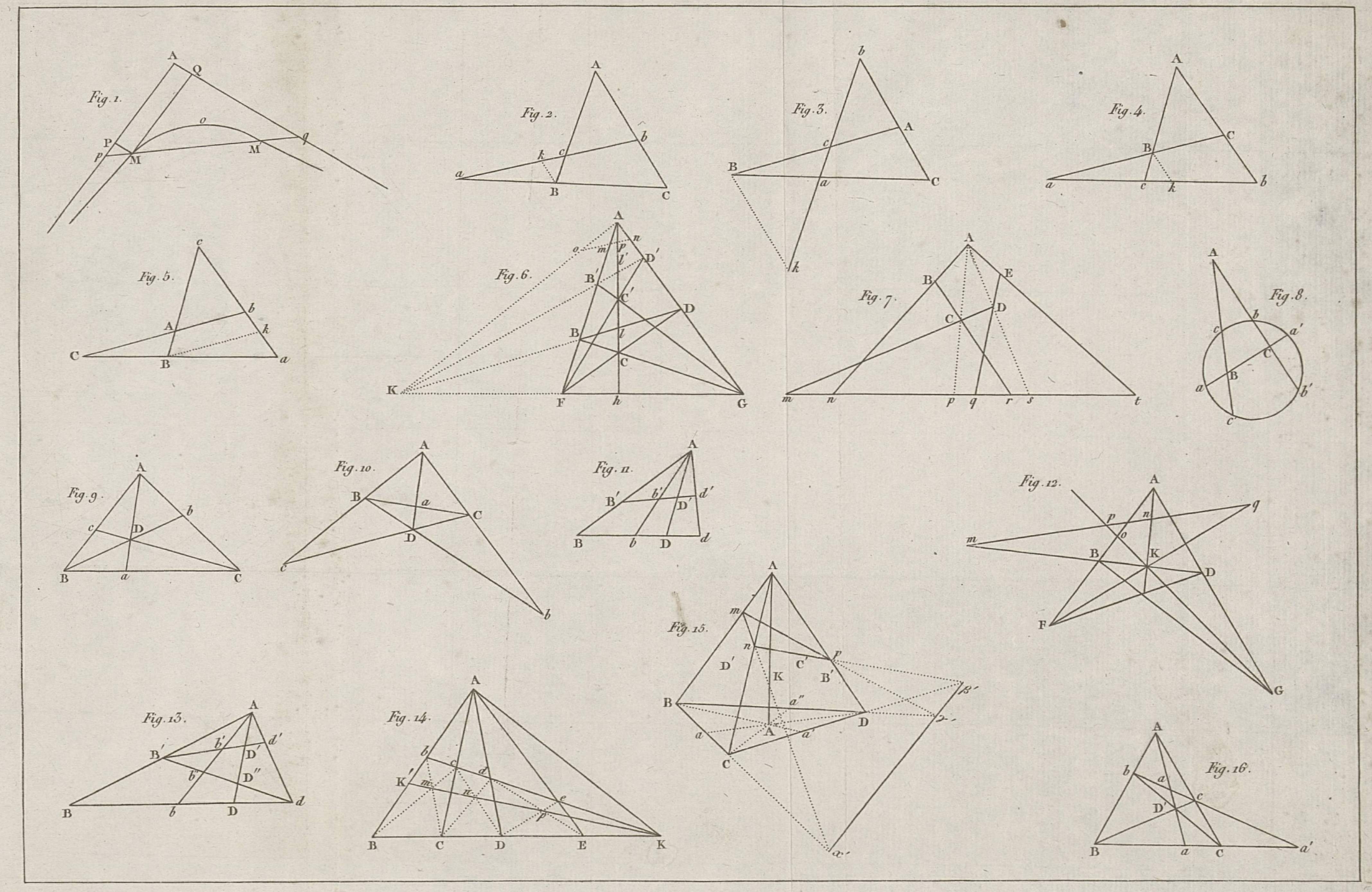
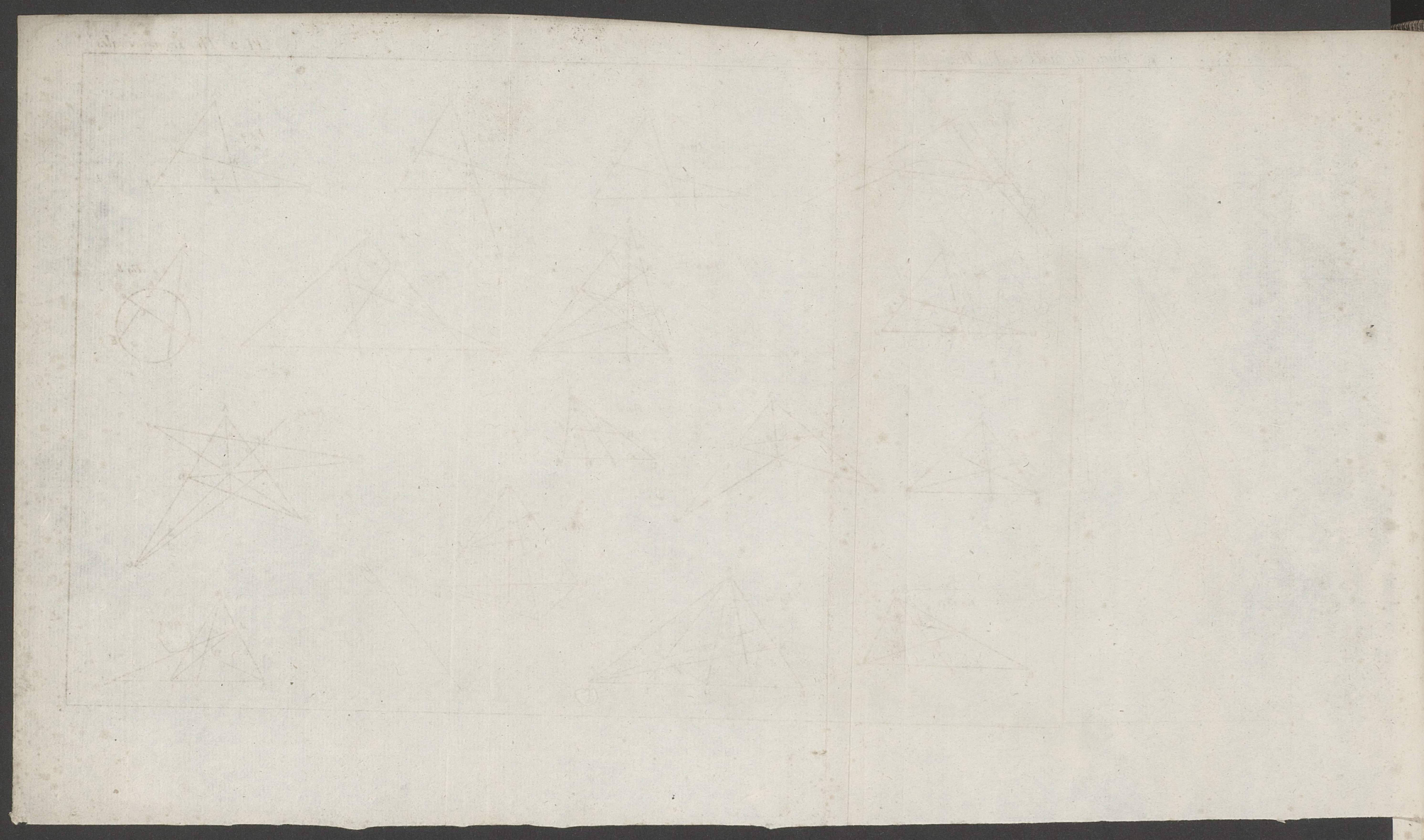


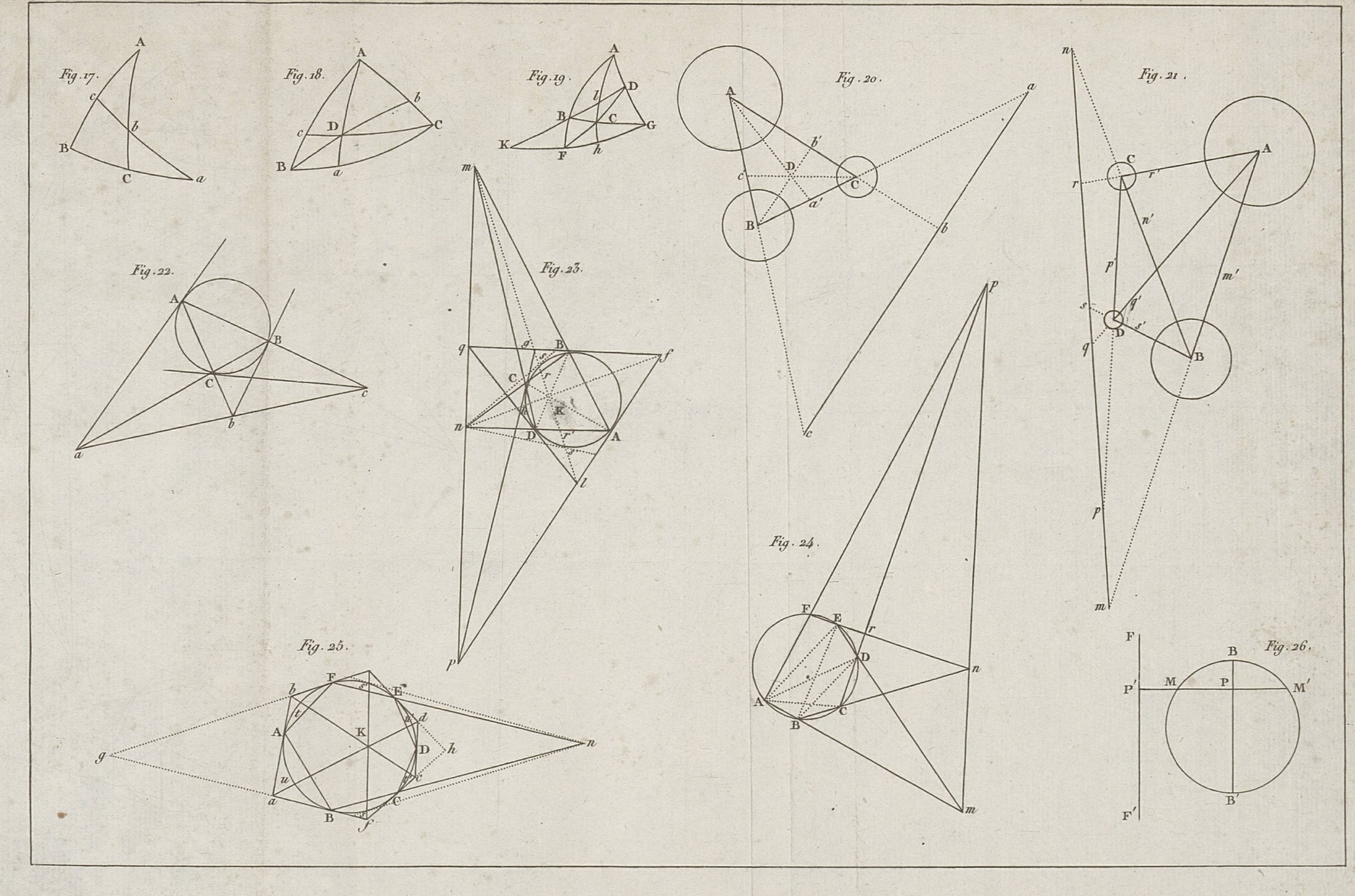
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 8. Bis.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.

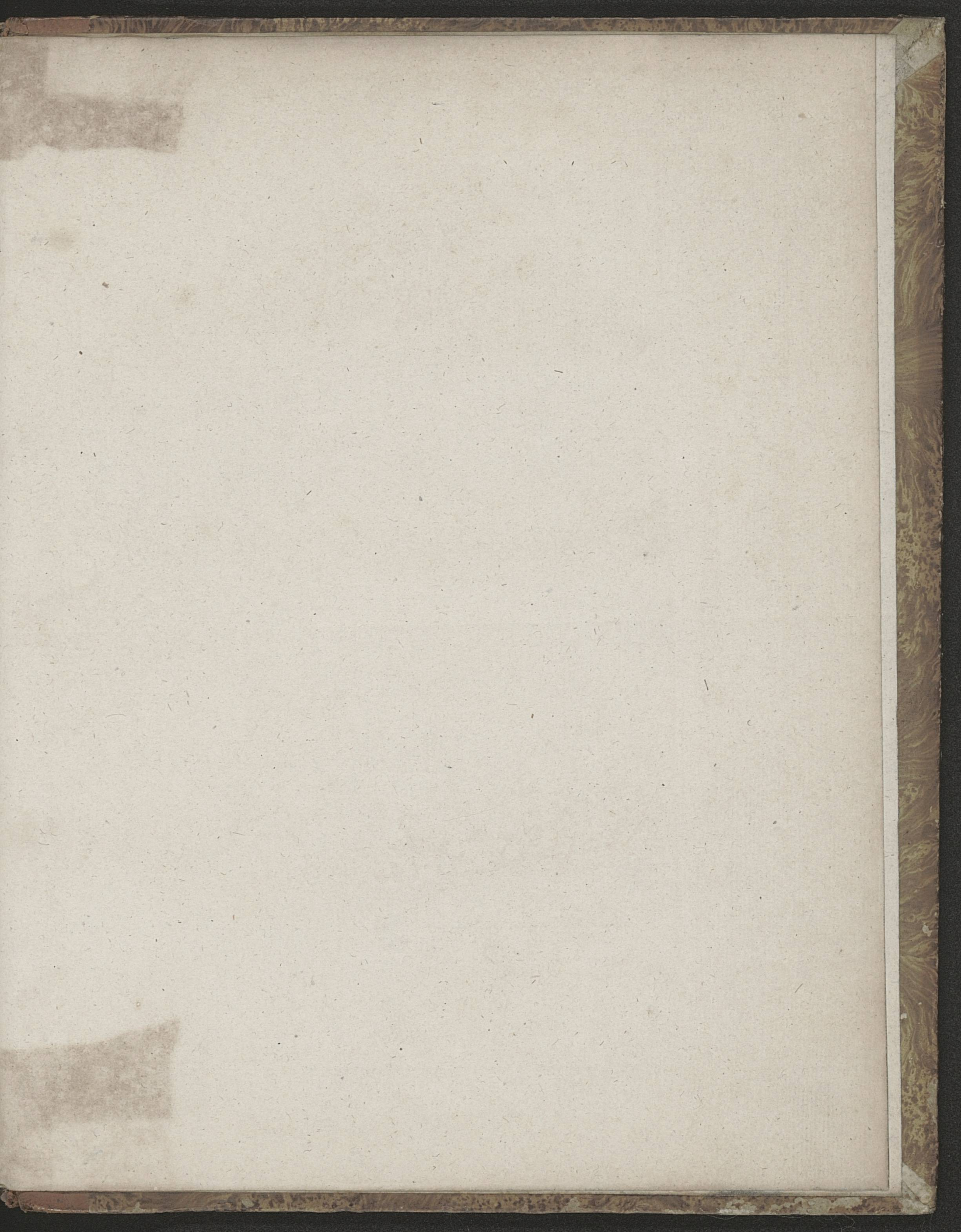


Pl. 2 . Th. Transversales.






Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.





SUPPLÉMENT

ET

MÉMOIRE



inches | centimeters

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11 (A)	12	13	14	15
L*	39.12	65.43	49.87	44.26	55.56	70.82	63.51	39.92	52.24	97.06	92.02	87.34	82.14	72.06	62.15
a*	13.24	18.11	-4.34	-13.80	9.82	-33.43	34.26	11.81	48.55	-0.40	-0.60	-0.75	-1.06	-1.19	-1.07
b*	15.07	18.72	-22.29	22.85	-24.49	-0.35	59.60	-46.07	18.51	1.13	0.23	0.21	0.43	0.28	0.19
Density →										0.04	0.09	0.15	0.22	0.36	0.51

	16 (M)	17	18 (B)	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
L*	49.25	38.62	28.86	16.19	8.29	3.44	31.41	72.46	72.95	29.37	54.91	43.96	82.74	52.79	50.87
a*	-0.16	-0.18	0.54	-0.05	-0.81	-0.23	20.98	-24.45	16.83	13.06	-38.91	52.00	3.45	50.88	-27.17
b*	0.01	-0.04	0.60	0.73	0.19	0.49	-19.43	55.93	68.80	-49.49	30.77	30.01	81.29	-12.72	-29.46
Density	0.75	0.98	1.24	1.67	2.04	2.42									

D50 Illuminant, 2 degree observer

Golden Thread

Colors by Munsell Color Services Lab

Don Williams